А. А. СТОЛЯР

ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ДОПУЩЕНО МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ВЫСШАЯ ШКОЛА"
МИНСК 1965

ОТ АВТОРА

Книга предназначена для студентов и преподавателей педагогических вузов.

Она может быть использована как учебное пособие по курсу методики математики и в семинарах, посвященных актуальным проблемам преподавания математики в средней школе, с целью привлечения студентов к научно-исследовательской работе в области педагогики математики.

Исследование рассматриваемых в этой книге проблем может служить темой курсовых и дипломных работ студентов, а также материалом для проведения ими педагогических экспериментов.

Книга может быть использована и учителями в их практической работе.

Участием в исследовании этих проблем, своим творческим трудом учитель может внести существенный вклад в развитие современной педагогики математики, в повышение уровня математического образования.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность профессору, доктору физико-математических наук А. И. Маркушевичу за полезные советы, ст. научному сотруднику АН СССР, кандидату философских наук Б. В. Бирюкову и ст. научным сотрудникам АПН РСФСР, кандидатам педагогических наук К. И. Нешкову, А. Д. Семушину и А. А. Фетисову за просмотр рукописи и ценные замечания.

Автор будет благодарен всем, кто пожелает сообщить свои отзывы и замечания о настоящей книге. Отзывы и замечания следует направлять по адресам: БССР, г. Могилев, ул. Ленина, 35, Педагогический институт, кафедра методики математики; г. Минск, ул. Кирова, 24, Издательство «Высшая школа».

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математики в последнее время привело к весьма плодотворному внедрению математических методов исследования в новые области науки и техники. Расширение поля приложения математики продолжается ускоренными темпами, повышая ее роль в жизни современного общества.

Программа КПСС справедливо называет математику первой в ряду ведущих отраслей естествознания, развитие которых определяет дальнейшие перспективы научно-технического прогресса.

В этих условиях совершенно недопустимо значительное отставание среднего математического образования от развития математической науки и его реформа становится задачей большого государственного значения.

Эта реформа предполагает два направления: *а*) модернизацию математического образования, т. е. его приближение к современной науке, и *б*) укрепление его связи с современной практикой, т. е. приближение к жизни. (Имеется в виду укрепление связи обучения математике именно с современной практикой, так как традиционное обучение включает лишь весьма примитивные приложения математики и не дает учащимся никакого представления об ее современных важнейших приложениях, допускающих элементарное описание.)

В связи с необходимостью модернизации среднего математического образования возникает ряд важных педагогических проблем, которые могут быть условно отнесены к двум категориям:

1) касающиеся содержания математического образования, объединяемые одним общим вопросом «чему учить?»;

2) касающиеся методов преподавания, объединяемые вопросом «как учить?».

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых важных проблем, касающихся логического аспекта преподавания и названных нами л о г и ч е с к и м и п р о б л е м а м и преподавания математики.

Предметом нашего исследования являются следующие проблемы:

а) определение запаса логических знаний и навыков, овладение которыми необходимо школьникам и даст определенный эффект как в усвоении ими самой математики, так и в развитии их познавательных способностей вообще;

б) разработка методики преподавания, включающей изучение логического языка математики в качестве составной части обучения математике;

в) применение логических знаний и навыков, приобретенных учащимися в процессе изучения математики, для уточнения и выяснения логической структуры аксиом, определений, теорем и доказательств;

г) применение аппарата современной логики в методических исследованиях для логического анализа учебного материала и отыскания наиболее эффективных способов его изложения;

д) приведение школьной трактовки математических понятий в соответствие с их современной научной трактовкой;

е) определение педагогически целесообразного соотношения эксперимента и дедукции на различных этапах обучения, а также определение различных уровней строгости;

ж) определение педагогически целесообразного соотношения конкретного и абстрактного на различных этапах обучения, различных уровней абстракции;

з) изучение общих логических основ современной математики, элементов теории множеств и математической логики в классах физико-математического профиля средней школы с дифференцированным обучением;

и) исследование возможности разъяснения учащимся этих классов сущности аксиоматического метода и его основных проблем;

к) подготовка учителей к решению логических и других актуальных проблем преподавания математики в школе.

Перечисленные проблемы исследуются во взаимной связи, ибо они не являются независимыми и решение некоторых из них открывает пути к решению других.

Настоящая книга состоит из двух частей. В первой части («Логический язык математики и методика преподавания») исследуются проблемы *а, б, в, д* во второй («Аксиоматический метод и обучение математике») — проблемы *е, ж, з, и*.

Наряду с общим исследованием указанных выше проблем в настоящей работе содержатся упражнения и изложение отдельных фрагментов математических теорий в школьном преподавании в качестве иллюстрации предлагаемого проекта их решения.

Интересующие нас проблемы, хотя и касаются методов преподавания, т. е. относятся к категории проблем, объединяемых вопросом «как учить?», не могут рассматриваться в отрыве от содержания преподавания, от того, чему мы учим. Поэтому перед тем как приступить к исследованию этих проблем, следует рассмотреть хотя бы в общих чертах вопрос о содержании школьного математического образования.

Мы обычно говорим, что в школе изучается «элементарная математика». Но термин «элементарная математика» применяется для обозначения двух различных понятий:

1) «...совокупности таких разделов, задач и методов математики, в которых не пользуются общими понятиями переменной, функции, предела и тем более общим понятием множества»;

2) «...совокупности математических дисциплин, изучаемых в средней общеобразовательной школе».[1]

Элементарную математику в первом смысле назовем в дальнейшем «традиционной» и обозначим сокращенно «т. э. м.». Элементарную математику во втором смысле, т. е. как предмет школьного обучения в современном понимании, назовем «современной» и обозначим сокращенно «с. э. м.».

Произведем сравнительный анализ этих понятий.

I. Всю историю развития математики условно разбивают на четыре основных периода.[2] Начало каждого нового периода ознаменовалось выдающимся научным достижением, определившим переход математики в новое качественное состояние.

Так, за периодом накопления первичных фактов, периодом зарождения математики, длившемся с древнейших времен до VI—V вв. до н. э., последовал период элементарной математики (т. э. м.), началом которого послужило построение геометрии как самостоятельной науки. Этот период длился до XVII в., когда создание исчисления бесконечно малых определило начало нового, третьего периода — периода классической высшей математики, или анализа.

Наконец, создание Н. И. Лобачевским первой неевклидовой геометрической системы (1826) явилось началом четвертого периода — периода современной математики.

Объем понятия т. э. м. составляют известные разделы математики: арифметика, геометрия, алгебра и тригонометрия, в основном сформировавшиеся во втором периоде, т. е. в течение более двух тысячелетий, до XVII в. Разумеется, в это же время, в недрах т. э. м. уже развивались идеи,

---

[1] БСЭ, изд. 2-е, т. 48, стр. 648.

[2] А. Н. Колмогоров. Математика. БСЭ, изд. 2-е, т. 26, стр. 465.

послужившие подготовкой к созданию дифференциального и интегрального исчислений. Но до XVII в. развивалась именно та математика, которая впоследствии стала называться «элементарной» в отличие от математики следующего периода, которая стала называться «высшей». С другой стороны, т. э. м. продолжает развиваться в настоящее время, но это развитие не находится на главных направлениях математики этого периода и существенного влияния на саму т. э. м. не оказывает.

Таким образом, объем понятия т. э. м. вполне определен, хотя строгого определения этого понятия не существует и вряд ли возможно. Указание, что в т. э. м. «не пользуются общими понятиями переменной, функции, предела и тем более общим понятием множества», несомненно характеризует в некоторой степени понятие т. э. м., но не может служить его определением хотя бы потому, что оно отрицательно (указывается то, чем не пользуется т. э. м., а не то, чем она пользуется).

Период элементарной математики называют еще и периодом математики постоянных величин в отличие от следующего за ним периода математики переменных величин. Это не означает, что т. э. м. совершенно не имела дела с переменными величинами. Достаточно привести в качестве примера тригонометрию, относящуюся к т. э. м. и изучающую определенные функции. Когда говорят об элементарной математике как о математике постоянных величин, имеют в виду, что она, изучая некоторые конкретные функции, не имела своим предметом изучение общего понятия функции. Она не пользовалась и не могла пользоваться тем мощным аппаратом, который был разработан в математике следующего периода на базе изучения общего понятия функции.

Термин «элементарная математика» не входит в современную научную математическую номенклатуру, но основные дисциплины т. э. м. включаются в определенные разделы математики: арифметика — в теорию чисел, элементарная геометрия — в геометрию, элементарная алгебра — в алгебру, элементарная теория тригонометрических функций — в анализ.

Таким образом, термин «элементарная математика» в смысле т. э. м. имеет в основном историческое значение, обозначая математику определенного периода.

II. Нас интересует элементарная математика во втором смысле. Математика как предмет школьного обучения с течением времени неизбежно меняет свое содержание под влиянием развития математической науки, оставаясь, однако, «элементарной».

Элементарная математика как предмет школьного обучения характеризуется двумя существенными признаками:

А. Она должна быть элементарной в смысле начальной, составляющей основы современной математической науки.

В. Она должна быть элементарной в смысле достаточно простой, доступной для учащихся средней школы.

Это понятие элементарной математики как предмета школьного обучения никогда не было адекватным понятию т. э. м. Даже до XVII в., когда т. э. м. составляла по существу всю математику, школьная математика включала в себя лишь часть ее результатов, хотя бы потому, что далеко не все, что относится к т. э. м., обладает признаком *В*, т. е. является доступным для учащихся, не говоря уже о том, что вообще вся т. э. м. не может укладываться в рамки школьного предмета.

Не касаясь истории развития элементарной математики как предмета школьного обучения, будем говорить об ее современном состоянии, имея в виду не столько то, что преподается, сколько то, что следовало бы преподавать в современной школе. Этим оправдывается и принятое нами название современной элементарной математики (с. э. м.).

Признаки *А* и *В* в некоторой степени характеризуют понятие с. э. м., не являясь, разумеется, его строгим определением. Эти признаки разнородны по своему характеру. Признак *А*, требующий, чтобы к понятию с. э. м. было отнесено все, составляющее основы современной математики, имеет логико-математический характер. Признак *В*, требующий, чтобы все, относимое к с. э. м., было достаточно простым и понятным детям и подросткам школьного возраста, имеет ярко выраженный психолого-педагогический характер.

В настоящее время вопрос об объеме понятия с. э. м., т. е. о том, что из современной математики должно составлять предмет школьного обучения, широко обсуждается в международном плане.

Не касаясь различных предложений (их очень много), ограничимся приведением двух примеров современных изданий, дающих некоторое представление об общих контурах объема понятия с. э. м. Следует оговориться, что оба издания, о которых будет идти речь, адресованы непосредственно учителям, и поэтому они содержат по каждому разделу значительно больше того, что можно преподавать в школе, и изложение материала в них не приспособлено к школьному преподаванию.

В качестве первого примера возьмем Энциклопедию Элементарной Математики (ЭЭМ). К сожалению, хороший замысел выпуска Энциклопедии не был полностью осуществлен: из запланированных семи книг вышли только первые четыре.[1] Следует отметить, что критика вышедших книг ЭЭМ исходила в основном из понятия т. э. м., в то время как редакционная коллегия, в которую входили видные ученые математики и педагоги П. С. Александров, А. И. Маркушевич и А. Я. Хинчин, поставила задачу «дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики», т. е. исходила из своего понимания с. э. м.

В предисловии к первой книге ЭЭМ[2] дается следующий общий план издания, который несколько характеризует с. э. м.:

«Книга первая. **Арифметика**

Происхождение систем счисления. Понятия множества, группы, кольца и поля; теоретические основы арифметики. Элементы теории чисел. Устный и письменный счет; вспомогательные средства вычислений.

Книга вторая. **Алгебра**

Векторные пространства и линейные преобразования. Кольцо многочленов и поле рациональных функций. Численные и графические методы решения уравнений.

Книга третья. **Анализ**

Функции и пределы; рациональная, степенная, показательная и логарифмическая функции; тригонометрические функции и обратные им. Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Элементарные функции комплексного переменного.

Книга четвертая. **Геометрия, часть I**

Топологические понятия. Основания геометрии. Понятие о неевклидовых геометриях. Элементы аналитической и проективной геометрии. Геометрические преобразования. Измерение площадей, длин, объемов и поверхностей.

Книга пятая. **Геометрия, часть II**

Многоугольники и многогранники. Круги и сферы. Применения в геодезии и астрономии. Замечательные кривые и поверхности. Задачи на построение. Методы графических изображений.

Книга шестая. **Различные вопросы**

Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Знаменитые математические задачи. Математические парадоксы и софизмы. Математические развлечения и игры.

Книга седьмая. **Методология и история математики»**

В качестве второго примера издания, характеризующего в некоторой степени понятие с. э. м., возьмем вышедшую во

---

[1] Четвертая книга вышла в 1963 г. после долгого перерыва в 11 лет.
[2] ЭЭМ, кн. 1. Арифметика. М., 1951, стр. 6—7.

Франции книгу Л. Феликс «Современное изложение элементарной математики».[1] Хотя автор этого труда акцентирует свое внимание на модернизации изложения и систематизации того, что традиционно включается в элементарную математику, в книге изложены и вопросы, не относящиеся к т. э. м., и которые, следовательно, отнесены автором к с. э. м.

Об этом свидетельствует беглый просмотр названий основных разделов и глав. Ниже приводится этот перечень.

«Книга первая. **Фундаментальные структуры**

Гл. I. Словарь и символы теории множеств. Операции.
Гл. II. Числа.
Гл. III. Векторные пространства.
Гл. IV. Отображение множества в множество. Точечные преобразования. Числовые функции.
Гл. V. Введение метрической геометрии.
Гл. VI. Алгебра Буля на множествах. Меры. Вероятности.

Книга вторая. **Арифметика и алгебра**

Часть первая. Теория чисел.

Гл. I. Целые числа.
Гл. II. Дроби. Рациональные числа. Десятичные числа.
Гл. III. Вещественные числа.

Часть вторая. Алгебраические выражения. Решение уравнений.

Гл. I. Многочлены. Рациональные дроби.
Гл. II. Решение уравнений.

Книга третья. **Анализ**

Гл. I. Локальное изучение числовой функции одной переменной.
Гл. II. Глобальное изучение числовой функции одной переменной.
Гл. III. Графики.
Гл. IV. Приложения общих теорем.
Гл. V. Первообразные.
Гл. VI. Комплексные числа (с элементами теории функций комплексного переменного).

Книга четвертая. **Геометрия**

Часть первая. Аффинная и проективная геометрия.
Часть вторая. Метрическая евклидова геометрия. (Понятия о метрических неевклидовых геометриях.)
Часть третья. Коники».

Если порядок, объем и трактовка вопросов в ЭЭМ и книге Л. Феликс во многом различны, то совокупности разделов математики, включаемых в одном и в другом случае в поня-

---

[1] Lucienne Felix. Exposé moderne des mathématiques élémentaires. Paris. 1959.

тие с. э. м., в главном, т. е. в том, что может составлять предмет школьного обучения, совпадают.

Многочисленные предложения, выдвигаемые у нас и за рубежом по вопросу о том, что следует включать в с. э. м., в основном не выходят за рамки двух приведенных перечней.

По нашему мнению (это мнение высказывается многими), к с. э. м. должны быть отнесены и начала математической логики, так как они входят в основы современной математики и достаточно элементарны, чтобы быть понятыми учащимися, т. е. обладают признаками *А* и *В*. Это предложение найдет ниже более детальное обоснование и конкретное методическое решение.

Произведенный анализ понятий т. э. м. и с. э. м. показывает, что они находятся в отношении пересечения. Многие вопросы т. э. м. не входят в школьный предмет математики, так как не удовлетворяют признаку *А* или признаку *В*, или обоим признакам (например, различные вопросы геометрии треугольника, за исключением наиболее простых ее результатов). С другой стороны, многие вопросы, которые уже входят в наши школьные программы (элементы теории пределов, дифференциального исчисления), и те, которые стоит в них ввести (элементы интегрального исчисления, теории вероятностей, математической логики и др.), не относятся к т. э. м.

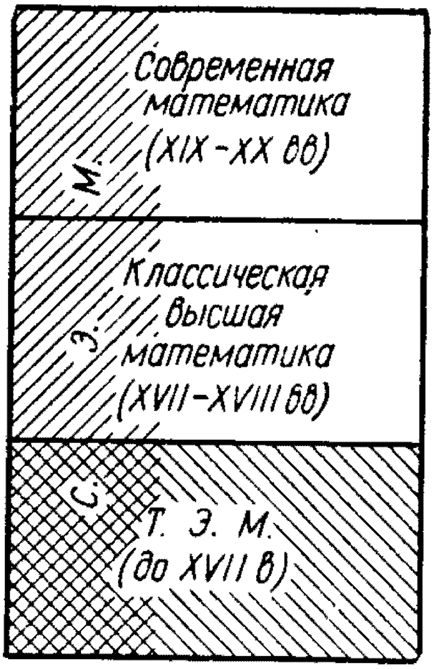


Рис. 1.

В связи с анализом понятия с. э. м. возникает и необходимость в уточнении свойства элементарности учебного материала.

Элементарность в смысле простоты, доступности зависит не только от излагаемого материала, но и от принятого способа изложения. Простой материал может оказаться трудным и недоступным для учащихся в результате неудачно выбранного способа изложения, и, наоборот, сложный материал может быть изложен просто и доступно для учащихся на соответствующем их пониманию логическом уровне.

Таким образом, после того как отобран материал, удовлетворяющий признаку *А*, т. е. составляющий основы современной математической науки, возникает важная педагогическая проблема приведения его к такому виду, чтобы он был доступен учащимся, т. е. чтобы он удовлетворял и признаку *В*.

Исследование и решение этой проблемы требует сосредоточения усилий математиков, ученых и педагогов и проведения широких педагогических экспериментов.

Интересующие нас проблемы не могут решаться без учета психологического фактора, в отрыве от того, кого мы обучаем, также как они не могут решаться без учета содержания обучения, т. е. в отрыве от того, чему мы обучаем.

При определении содержания и методики обучения на каждом этапе должны учитываться и логика соответствующей науки и психология ребенка данного возраста.

В области каждой науки, в частности и в области математики, можно мыслить на различных уровнях. Каждый уровень мышления включает в себя определенный уровень обобщения и абстрагирования, выполнение определенных логических операций.

Так, например, в докладе «Мышление ребенка и геометрия»,[1] представленном международному конгрессу математиков в Эдинбурге (1958), П.-Х. ван Хиле выявляет пять уровней мышления в области геометрии. Примерно столько же уровней мышления выявляется и в области алгебры. (Мы их рассмотрим во второй части книги в связи с исследованием проблем *е*, *ж*.)

Важно отметить, что переход от одного уровня мышления в данной области к следующему, более высокому, зависит не только от возраста. Мы рассматриваем процесс, ведущий к более высокому уровню мышления, как процесс обучения и воспитания.

Многочисленные психолого-педагогические эксперименты, проводимые в последнее время как у нас, так и за рубежом, подтверждают неправомерность приписывания учащимся определенного возраста определенного уровня мышления. Путем специально проводимой подготовительной работы можно значительно расширить возможности учащихся к обобщению и абстрагированию, к выполнению определенных логических операций, т. е. обеспечить более ранний переход на более высокий уровень мышления.

Если, например, еще недавно считалось преждевременным изучение алгебры в V классе ввиду того, что уровень мышления в связи с оперированием произвольными числами в буквенном обозначении превышает якобы возможности учащихся данного возраста, то сейчас психолого-педагогические эксперименты П. А. Шеварева, В. В. Давыдова, Д. Б. Эльконина и других подтверждают возможность изучения начальной алгебры уже в I—III классах.

---

[1] P.-H. van Hiele. La pensée de l'enfant et la géometrie. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public, 1959, № 198.

Учитывая результаты этих экспериментов, мы приходим к выводу о возможности достижения в старших классах средней школы более высокого уровня мышления в области алгебры, чем тот, который достигается при традиционном преподавании. Мы имеем в виду возможность перехода от обыкновенной алгебры, изучаемой в конкретной интерпретации, в которой буквы обозначают числа из определенного множества, к алгебре как буквенному исчислению, где буквы обозначают объекты произвольной, неопределенной природы, допускающей различные конкретные интерпретации. Во второй части книги мы покажем этот переход на примерах абстрактной теории коммутативной группы, абстрактной булевой алгебры и их различных конкретных моделей.

В связи с исследованием проблемы приведения школьной трактовки математических понятий в соответствие с их современной научной трактовкой и формирования для этого у учащихся теоретико-множественных понятий (g) мы должны учитывать результаты, полученные в исследованиях проф. П. Я. Гальперина и его сотрудников, разрабатывающих теорию умственных действий как основы формирования понятий.

Операции над множествами и отношения между ними отражаются соответствующими умственными действиями, которые лежат в основе логических операций и трактовки различных математических понятий на базе теоретико-множественных идей. Приведенная в гл. 2, ч. I система упражнений для формирования теоретико-множественных понятий рассчитана на выработку у учащихся важных умственных действий, содействующих их более быстрому логическому развитию.

Таким образом, учет психологического фактора при решении логических и других проблем преподавания математики не означает простого приспособления преподавания к психологии ребенка данного возраста, а предполагает такую методику, которая привела бы к максимально возможному на данном этапе развитию учащихся, к ускорению перехода на более высокий уровень мышления.

ЧАСТЬ I

ЛОГИЧЕСКИЙ ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Глава 1. Язык математики и язык обучения

§ 1. Математику иногда сравнивают с сооружением, при этом изучаемые ею множества объектов со свойственными им отношениями и операциями сравнивают с кирпичами, а логику — со связывающим веществом, цементом. Этим сравнением хотят подчеркнуть роль логики в построении математических теорий.

Когда говорят, что математическая теория строится аксиоматически, или дедуктивно, имеют в виду, в частности, что предложения этой теории (теоремы) выводятся чисто логическим путем из нескольких предложений этой же теории, принятых за исходные и называемых аксиомами.

Но что значит «выводятся чисто логическим путем»?

Язык математики (совокупность всех терминов, слов и символов, из которых состоят математические предложения), язык каждой математической теории есть язык логико-математический ($Я_{лм}$). $Я_{лм}$ состоит из двух компонентов — $Я_{м}$ и $Я_{л}$.

$Я_{м}$ — язык данной математической теории, состоящий из специфических терминов и символов, обозначающих объекты, свойства и отношения объектов множества, структура которого описывается этой теорией, а $Я_{л}$ — логический язык, состоящий из терминов и символов, обозначающих логические операции, используемые для конструирования предложений и для вывода одних предложений из других, т. е. для развертывания теории на базе принятой системы аксиом.

Два компонента $Я_{лм}$ тесно переплетаются в каждом предложении теории. Это легко обнаружить путем анализа любого предложения любой математической теории или же рассуждения, проведенного в рамках теории.

Возьмем в качестве примера следующее предложение элементарной геометрии: «Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или суть биссектрисы углов, то параллелограмм есть ромб».

В этом предложении содержатся:

а) математические термины (элементы $Я_м$): диагонали параллелограмма, взаимно перпендикулярны, биссектрисы углов, параллелограмм, ромб;

б) логические термины (элементы $Я_л$): если.., то, или, суть, есть.

В качестве другого примера возьмем следующее рассуждение: «Если a или b делится на 3, то $a \cdot b$ делится на 3; но $a \cdot b$ не делится на 3, следовательно, ни a, ни b не делится на 3».

Это рассуждение состоит из трех предложений:

1) если a или b делится на 3, то $a \cdot b$ делится на 3;

2) $a \cdot b$ не делится на 3;

3) ни a, ни b не делится на 3, причем из первых двух выводится третье, что и обозначается термином «следовательно». Таким образом, в этом рассуждении имеются:

а) математические термины (элементы $Я_м$): a, b, 3, делится на, $\cdot$ (знак умножения);

б) логические термины (элементы $Я_л$): если.., то, или, но, не, ни.., ни, следовательно.

§ 2. С первых попыток аксиоматического построения геометрии в древней Греции (V в. до н. э.) и почти до решения этой проблемы Гильбертом (1899) в этих построениях пользовались неформализованными логическими средствами вывода, обычной содержательной логикой.

С течением времени математика добилась высокой степени формализации своего аппарата, что весьма положительно повлияло на ее дальнейшее развитие. Но в то время, как математика развивала свой собственный язык ($Я_м$), логический язык ($Я_л$), используемый ею, оставался неуточненным. Получилось несоответствие между компонентами $Я_{лм}$ — собственно математическим языком, достигшим высокого уровня совершенства, и несовершенным логическим языком.

Перед математикой возникла проблема усовершенствования логики, разработки адекватного логического языка. Это стало возможно в результате применения математических методов к логике.

Идею возможности и целесообразности математизации логики высказал еще известный немецкий математик и логик

Лейбниц (1646—1716), однако он ее не осуществил. Начала новой математической логики были разработаны в XIX в. в работах английского ученого Дж. Буля (1847, 1854), немецкого математика Э. Шрёдера (1895), русского математика П. С. Порецкого (1884) и др. В работах немецкого математика Г. Фреге (1879, 1884), итальянского математика Пеано (1894) впервые аппарат математической логики применялся для построения математических теорий.

Существенный вклад в развитие современной математической логики внесли и вносят выдающиеся советские математики И. И. Жегалкин (1869—1947), В. И. Гливенко (1897—1940), А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков, А. А. Марков и их многочисленные ученики.

Создание формализованного логического языка является важным достижением современной математики. Различие между естественным и формализованным языками, разумеется, не является принципиальным. Это лишь различие в степени формализации. Можно сказать, что степень формализации логического языка математики была приведена в соответствие со степенью формализации собственного математического языка. Этим достигнута, в частности, четкость и точность, однозначность смысла логических терминов.

§ 3. Язык обучения математике в средней школе (в дальнейшем будем говорить кратко «язык обучения» или обозначать символом «$Я_0$»)[1] не совпадает ни по форме, ни по содержанию с языком изучаемой математической теории.

а) По форме $Я_0$ не имеет столь высокой степени формализации, как $Я_{лм}$ соответствующей математической теории, но превышает по степени формализации естественный язык. Общеизвестно, что в школьном преподавании издавна применяется математическая символика, частично формализованный математический аппарат. Хотя под буквами в школьной алгебре мы неизменно понимаем числа из определенного множества (натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел) и, применяя конкретные числовые подстановки в буквенные выражения, не теряем связь формализованного аппарата с его содержательным истолкованием, преобразование алгебраических выражений мы выполняем по определенным формальным правилам, не думая при этом о конкретной числовой интерпретации выражений и о конкретном смысле использованных свойств операций.

б) По содержанию далеко не все в языке обучения относится к языку излагаемой теории.

Например, предложение «представление о прямой линии дает туго вытянутая нить» не является предложением

---

[1] Понятие $Я_0$ еще в меньшей степени уточнено, чем $Я_{лм}$, $Я_л$, $Я_м$.

геометрической теории, так как оно содержит такие термины, как: «представление», «туго вытянутая нить», которые не являются ни геометрическими, ни логическими. Таким образом, это предложение относится к языку обучения геометрии, но не относится к языку самой геометрической теории. Оно предназначено для описания основных объектов той конкретной модели, в которой эта теория строится в школьном обучении.

Объяснение, даваемое в процессе обучения, в связи с экспериментальным установлением истинности какого-нибудь предложения теории также не относится к языку этой теории.

Например, следующий текст: «Вырежьте из бумаги треугольник ABC. Оторвите углы B и C и приложите их к углу A» — относится к языку обучения геометрии, но не относится к языку геометрии.

Часто и текст, состоящий из одних математических и логических терминов, относится к языку обучения, но не относится к языку научного изложения соответствующей теории.

Например, в процессе обучения часто обнаруживают некоторые математические истины индуктивным путем. Говорят, например, учащимся начальных классов: «$2 + 3 = 3 + 2$; $4 + 5 = 5 + 4$; $6 + 3 = 3 + 6$». Очевидно, что вообще для любых двух чисел a и b имеет место переместительный закон сложения, т. е. $a + b = b + a$.

Этот текст, хотя и состоит из одних арифметических и логических терминов, не относится к соответствующей научной теории, потому что в этой теории коммутативный закон сложения (если он не принят за аксиому) устанавливается без помощи конкретных примеров и неполной индукции, не являющейся методом доказательства, а другими логическими средствами. Таким образом, логика в обучении математике часто отличается от логики изучаемой математики. Это отличие обусловлено обстоятельствами психологического порядка.

Язык обучения содержит описание различных примеров, экспериментов, индукций, аналогий, различные приложения теории, разъяснения, вообще все то, что должно обеспечить усвоение учащимися излагаемой теории. Разработка содержания языка обучения — одна из центральных задач методики преподавания математики.

§ 4. Рассмотрим некоторые серьезные дефекты традиционной методики преподавания математики.

а) Язык обучения, разработанный традиционной методикой, относится лишь к одному компоненту изучаемого $Я_{лм}$, а именно к $Я_м$, т. е. все разъяснения, примеры, приложения, приводимые в процессе обучения, иллюстрируют лишь математические понятия (вещи, свойства, отношения, операции).

Необходимо отметить, что и в этой части $Я_0$ содержит серьезный пробел. Традиционная методика уделяет главное внимание лишь описанию математических понятий, отражающих свойства предметов.

Получается неправильное соотношение между тем, как математика изучает свои объекты и как мы их изучаем в школе.

Математика изучает не отдельные объекты, а множества объектов, причем предметом изучения являются структуры этих множеств, определяемые отношениями между их элементами и операциями над ними, т. е. законами композиции элементов, с помощью которых из двух данных элементов множества образуется новый элемент этого множества.

Эта трактовка предмета математики, особенно ярко выраженная в современном ее развитии на базе теоретико-множественных идей, не противоречит, а наоборот, подтверждает известное определение предмета математики, данное Энгельсом около 90 лет назад. Энгельс уже тогда говорил,[1] что математика изучает «пространственные формы и количественные отношения действительного мира».

Математика изучает именно формы, а не объекты, имеющие эти формы, количественные отношения, а не предметы, находящиеся в этих отношениях. Множества объектов различной природы могут иметь одну и ту же структуру, определяемую одними и теми же отношениями между элементами этих множеств. Математика изучает эти отношения. Объекты различной конкретной природы могут иметь одну и ту же пространственную форму. Единство формы характеризует это множество объектов. Математика изучает эту форму.

Современная математика значительно расширила поле своих приложений благодаря тому, что в процессе ее развития существенно расширился круг изучаемых отношений и форм. Кроме количественных отношений и пространственных форм в традиционном понимании, она стала изучать и другие отношения и формы действительности, лишь сходные с первыми. Обнаруженная глубокая аналогия между некоторыми неколичественными отношениями и традиционными количественными отношениями позволила разработать и применить математические методы к новым областям науки и практики (биология, медицина, языкознание и др.).

Установившаяся методика преподавания математики в школе, акцентируя свое главное внимание на изучении отдельных объектов и недостаточно изучая отношения и операции в различных множествах (чисел, точек), не может достигнуть понимания учащимися современных приложений

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. М., 1950, стр. 37.

математики и недостаточно готовит их логически к пониманию этих приложений в дальнейшем. Это вполне понятно, ибо логическое развитие учащихся как результат воспитания существенно зависит от того направления, которое дается ему в процессе обучения.

В третьей главе будет рассмотрен вопрос об изучении отношений и операций в числовых множествах.

б) Возникает вопрос: как изучается вторая часть логико-математического языка, т. е. логический язык математики ($Я_л$)?

Он вообще не изучается. Традиционная методика преподавания математики не предусматривает изучение логического языка математики в процессе обучения.

Совершенно очевидно, что если язык изучаемой теории есть логико-математический язык, состоящий из двух частей ($Я_м$ и $Я_л$), то и соответствующий язык обучения ($Я_о$) также должен состоять из двух частей: $Я_{ом}$ и $Я_{ол}$, где $Я_{ом}$ — язык обучения собственной математической части изучаемой теории, а $Я_{ол}$ — язык обучения ее логической части, ее логики.

В установившейся практике преподавания второй компонент $Я_о$ отсутствует. Получается парадоксальное положение, когда в одном и том же математическом предложении точный смысл одних терминов (математических) разъясняется учащимся в процессе обучения, а точный смысл других терминов (логических), не менее важный для понимания сущности выраженного этим предложением факта, не разъясняется.

В школьном обучении постоянно одни предложения выводятся из других, но ни на одном этапе обучения не разъясняется, что значит «одно предложение логически следует из другого (или других)».

Учащиеся понимают свойства выполняемых ими математических операций, но совершенно не знают (вследствие того, что им это не разъясняется) свойства не менее часто выполняемых ими логических операций. Это незнание часто является причиной затруднений в усвоении учащимися учебного материала. Непонимание логики изучаемого фрагмента теории приводит к непониманию всего этого фрагмента.

Традиционная методика стремится устранить эти трудности путем увеличения числа примеров и многократного разъяснения математической части непонятой логико-математической конструкции, хотя причиной возникших трудностей является непонимание ее логической части. Предлагается и тренировка учащихся с помощью специально подобранных упражнений в выполнении затрудняющих их логических операций, но без разъяснения им смысла и свойств этих операций.

Очевидно, что такой метод обучения задерживает прохождение курса и развитие учащихся. Мы здесь не склонны недооценивать значение повторения и тренировки, но такое повторение, когда мы не знаем, что повторяем, в некоторой степени похоже на описанный Торндайком[1] опыт вычерчивания с закрытыми глазами 3000 отрезков длиной в 4 дюйма, в процессе которого испытуемый ничему не научился. Сам Торндайк признает, что если бы подопытным разрешалось открывать глаза после каждого испытания и измерять отрезки, то у них бы выработалось умение чертить отрезки длиной от 3,8 до 4,2 дюйма.

Очевидно, если учащимся «открывать глаза», т. е. разъяснять сущность выполняемых ими логических операций, можно устранить много трудностей на пути усвоения ими математических знаний.

Традиционные методы преподавания, почти не учитывая логического языка математики, недостаточно эффективны как в обеспечении учащихся глубокими математическими знаниями, так и в достижении ими необходимого логического развития. Разумеется, эти методы приводят к определенному развитию логического мышления учащихся, однако не в такой мере, в какой это необходимо и в какой это может быть достигнуто при осознанном выполнении логических операций.

Попытка восполнить пробел в логическом воспитании учащихся введением логики в качестве специального предмета, как известно, не увенчалась успехом. Нельзя изучать в школе логику в отрыве от ее применения, особенно в отрыве от математики, где она широко используется.

Возникает вопрос: можно ли изучить математику в отрыве от логики, с которой она тесно переплетается? Установившаяся практика преподавания дает утвердительный ответ на этот вопрос, но следует отметить, что эффективность такого обучения недостаточно высока.

Проблема изучения элементов логики в связи с изучением математики давно обсуждается в методико-математической литературе, на различных конференциях и съездах по математическому образованию. Известны и различные попытки решения этой проблемы, которые, однако, не были внедрены в широкую практику преподавания. Эти неудачи укрепили мнение тех, кто считает, что нельзя и не следует изучать логику на уроках математики, что не только учащиеся, но и мы сами правильно рассуждаем без знания логики. Что касается этого довода, то он явно несостоятелен: из того, что учащиеся правильно рассуждают без знания логики, не следует, что знание логики не повысит их культуру мышле-

[1] См. Э. Л. Торндайк. Процесс учения у человека. М., 1935.

ния, не говоря уже о том, что сама посылка («учащиеся правильно рассуждают») вряд ли может быть безоговорочно принята за истину.

Мы действительно не можем и не должны изучать вообще логику на уроках математики, но мы можем и должны изучать некоторые из тех логических операций и средств вывода, которыми мы пользуемся при изучении математики.

Неудачи в решении проблемы объясняются в основном тем, что два компонента логико-математического языка — $Я_м$ и $Я_л$ были разнородными, так как $Я_л$ в своей традиционной форме значительно отличался от $Я_м$ и эта его форма требовала разработки языка обучения ($Я_{ол}$), значительно отличающегося от языка обучения собственно математике ($Я_{ом}$).

В настоящее время, когда логика математики сама стала ветвью математики и $Я_л$ по существу является разновидностью $Я_м$, по-новому ставится педагогическая проблема разработки второго компонента $Я_о$, а именно — $Я_{ол}$. Теперь, изучая логику математики, мы по существу изучаем математику.

Мы приходим к выводу, что логический язык математики может и должен изучаться в современной форме, так как:

1) математическая логика разработала весьма удобный рабочий аппарат математики, который может эффективно применяться в школьном преподавании;

2) математическая логика позволяет знакомить учащихся с важными ее приложениями в современной технике;

3) математическая логика положительно влияет на формирование четкого, ясного и точного мышления учащихся.

Как видно, изучение элементов математической логики не только устраняет пробел в логическом воспитании учащихся, но и расширяет политехническую направленность математического образования.

Это изучение мыслится не в виде специального предмета или приложения к изучению математики, а как неотъемлемая часть его.

§ 5. Применение логической символики в школьном обучении должно быть тщательно продумано. Символизация не означает еще полной формализации логических операций. Такая формализация вряд ли привела бы к желаемому логическому развитию учащихся.

Мы должны использовать важные качества символического языка математической логики: его точность, краткость, четкость, способствующие формированию аналогичных качеств мышления у учащихся. Но логические символы должны вводиться не как лишенные смысла знаки, которыми оперируют по определенным формальным правилам. Как и математическая, логическая символика может быть введена только в содержательном плане.

Основная педагогическая проблема, которая ставится здесь, состоит не во введении символики, а в изучении логического языка математики. Введение же логической символики — лишь часть этой проблемы, которой иногда стремятся подменять всю проблему. Так, в связи с обсуждением проблемы модернизации математического образования за рубежом выдвигаются предложения о введении в школьное преподавание логической символики. Такая постановка проблемы и предлагаемые решения вряд ли могут содействовать прогрессу в обучении математике.

Предлагаемый в настоящей работе проект решения проблемы исходит из того, что главное состоит в изучении необходимых элементов логического языка математики, в достижении понимания учащимися точного смысла выполняемых ими логических операций. Этим целям подчиняется и введение логической символики. Главное заключается не в формальном оперировании логическими символами, а в понимании того, что ими обозначается. Разумеется, учащиеся должны приобрести и некоторые навыки формального оперирования логическими символами, навыки в «логических вычислениях». Это важно, в частности, для решения задач, связанных с техническими приложениями современной логики. Но и эти навыки должны опираться на содержательное понимание логических операций и их свойств.

Традиционная методика предусматривает изучение лишь содержания (математического) рассуждений, не касаясь их формы, их логической структуры. В результате такого обучения логическая структура рассуждения оказывается в сознании учащихся неразрывно связанной с его определенным содержанием, что не может содействовать развитию умения применять эту же логическую структуру рассуждения к другому содержанию.

Аналогичное явление встречается и в других областях обучения, например в начальной арифметике, где иногда в результате неправильной постановки преподавания способ решения задачи связан в сознании учащихся с определенным конкретным ее содержанием. Так, одна ученица III класса заплакала во время контрольной работы потому, что ей предложили задачу «на яблоки», а до этого они решали задачу «на конфеты».

Для выделения и изучения логической структуры математических предложений и рассуждений необходимо варьировать их содержание, т. е. рассматривать предложения и рассуждения различного математического содержания, но одинаковой логической структуры, затем заметить то общее, что имеется в этих предложениях и рассуждениях, т. е. их логическую структуру, и абстрагировать ее от конкретного содержания этих предложений и рассуждений.

Таким образом, мы рассматриваем логическую форму в чистом виде для ее изучения в течение лишь небольшого промежутка времени по сравнению с тем временем, когда уже изученная логическая форма применяется в явном виде и наполнена новым, различным содержанием.

§ 6. Возникает вопрос о программе изучения логического языка математики. Прежде всего при определении этой программы необходимо исходить из того, что составляет общие логические основы современной математики.

Известно, что к концу XIX в. теория множеств стала одной из основ математики. Современная научная трактовка математических понятий строится на базе теоретико-множественных идей. Но при построении самой теории множеств обычно пользуются логикой высказываний, так как делают различные высказывания о множествах. Поэтому справедливо считают логику высказываний первоначальной логической системой.

На логике высказываний строится логика предикатов, которая вместе с теорией множеств может служить основой для построения других общих (общая алгебра, общая топология, общая теория векторных и метрических пространств) и специальных математических теорий.

Получается следующая схема общих логических основ современной математики:

Частные (специальные) математические теории
↑ ↑
Общие математические теории
↑ ↑
Теория множеств   Логика предикатов
↑ ↑
Логика высказываний

Определяя нашу программу изучения логических основ и средств математики в средней школе, мы должны исходить из тех же признаков (A и B), которые были сформулированы во введении в связи с рассмотрением вопроса о содержании современной элементарной математики, т. е. мы должны отобрать то, что составляет начала логики (A) и достаточно элементарно, т. е. просто и доступно учащимся (B), и, кроме того, находит применение в самой школьной математике или имеет другие важные приложения, доступные пониманию учащихся.

Исходя из этих признаков, приходим к выводу о необходимости изучения элементов логики высказываний, теории множеств и логики предикатов.

Логика высказываний — наиболее элементарная и вместе с тем фундаментальная часть математической логики, играющая в ней такую же важную роль, какую играет, например, арифметика натуральных чисел в учении о числе. Средства вывода, которые дает нам логика высказываний, находят широкое применение в школьной математике и, кроме того, именно аппарат логики высказываний находит важные технические приложения, вполне доступные пониманию учащихся.

Начала логики высказываний могут быть изложены доступно, на конкретном материале школьной математики, учащимся 14—15 лет, т. е. не раньше, чем в VII—VIII классах. Элементарная же часть теории множеств, получившая первоначальное развитие под названием логики классов и по существу эквивалентная логике высказываний (как две модели абстрактной булевой алгебры), доступна уже учащимся начальных классов, детям 7—10 лет, так как основные теоретико-множественные понятия отражают простейший, уже доступный детям этого возраста жизненный опыт. Поэтому в школьном обучении формирование теоретико-множественных понятий должно предшествовать изучению элементов логики высказываний. Изучение элементов теории множеств служит логической пропедевтикой. Однако наши цели не будут достигнуты, если мы ограничимся изучением начал теории множеств и логики высказываний. Крайне необходимы и некоторые элементарные сведения из логики предикатов. Начала логики предикатов достаточно элементарны и доступны учащимся IX—X классов.[1]

§ 7. Каждый раз, когда предлагается изучать в школе что-то новое, что до сих пор не изучалось, возникает вопрос о времени, необходимом для этого изучения.

Прежде всего следует отметить, что то новое, что предлагается изучать в данном случае, лежит в основе уже изучаемого. Речь идет о постановке школьной математики на современные основы.

Изучение элементов логического языка математики предлагается организовать следующим образом: в I—VIII классах изучение ведется постепенно, как неотъемлемая часть обучения математике, без выделения специальных тем и уроков; в IX классах физико-математического профиля (при дифференцированном обучении) предлагается выделить специальную тему «Элементы теории множеств и математической логики» (примерно 20—25 часов) для систематизации и расширения уже имеющихся у учащихся теоретико-множественных и логических знаний и рассмотрения некоторых

[1] Намечаемая нами программа и ее реализация описаны в последующих главах (часть I, главы 2, 3, 4, 5, 7).

важных приложений. В классах других профилей (IX, X) можно ограничиваться некоторым расширением сведений, полученных учащимися I—VIII классов, без выделения специальной темы.

Но и в этом случае изучение элементов логики требует дополнительной затраты времени на уроках математики. Где взять это время при наличии перегрузки программ?

Решение вопроса надо искать в усовершенствовании методов преподавания. Возникает проблема разработки методов преподавания, обеспечивающих достижение более высокого уровня логического развития учащихся, глубоких и прочных знаний при более интенсивных темпах прохождения курса. Это возможно, если главной целью преподавания будет достижение определенного уровня математического развития, максимально возможного для данного возраста. Для этого необходима специальная постановка преподавания, ибо математическое развитие не является простым результатом приобретенных знаний и навыков.

Методика преподавания, учитывающая логический язык изучаемой теории и логические знания учащихся, приводит к экономии времени не за счет исключения из программы каких-нибудь специальных тем (возможно и это, но мы здесь не рассматриваем этот вопрос), а за счет более быстрого прохождения курса, достигаемого благодаря лучшему пониманию учащимися изучаемого материала и делающего излишними дополнительные разъяснения и многократное решение однотипных примеров. Последнее не надо понимать как отрицание целесообразности тренировки учащихся с целью приобретения важных для практики навыков вычислений, измерений, черчения и др. Речь идет лишь о возможности значительного сокращения числа тех однотипных примеров, которые часто решаются с целью достижения лучшего понимания теории.

Глава 2. Формирование теоретико-множественных понятий у учащихся начальных классов

§ 1. Совершенно очевидно, что нельзя успешно использовать теоретико-множественные понятия в обучении математике без достаточной предварительной подготовки учащихся, состоящей в формировании у них этих понятий и усвоении ими теоретико-множественного языка. Эта подготовка окажется тем основательнее, чем раньше она начнется.

Формирование первых теоретико-множественных понятий на возможно более ранней ступени обучения имеет общеобразовательное и воспитательное значение, выходящее за рамки их применения к трактовке других математических понятий. Отношения между множествами и операции над ними представляют собой конкретную интерпретацию логических отношений и операций:

отрицание высказывания — дополнение множества,
дизъюнкция высказываний — объединение множеств,
конъюнкция высказываний — пересечение множеств,
импликация — включение одного множества в другое,
правило силлогизма — транзитивность включения и т. д.

Несомненно, что традиция ограничиваться в начальных классах лишь обучением учащихся алгоритмам четырех арифметических операций в настоящее время выглядит архаизмом. С современной точки зрения обучение логическим операциям в их простейшем теоретико-множественном истолковании является не менее важной целью.

Настоящая глава посвящена описанию системы упражнений для формирования первых теоретико-множественных понятий, которая была подвергнута автором экспериментальной проверке в IV классе.

Результаты проведенного эксперимента подкрепляют предположение о возможности еще более раннего начала этой работы.

§ 2. Система упражнений рассчитана на реализацию следующей программы формирования первых представлений и понятий.

«Множество (конечное, исключая пустое и единичное множества). Отношение принадлежности объекта к множеству и его отрицание. Задание множества перечислением элементов и описанием (с помощью характеристического свойства).

Отношение включения и его отрицание. Подмножество. Равенство множеств. Выделение подмножества с помощью свойства.

Дополнение множества. Объединение и пересечение множеств.

Составление множества всех упорядоченных пар элементов данного множества. Выделение подмножества упорядоченных пар, удовлетворяющих некоторому отношению ($>$, $=$, $<$)».

Предлагаемая система упражнений составлена таким образом, что каждое новое понятие сначала разъясняется на конкретных примерах, взятых из уже знакомого учащимся жизненного опыта, затем эти понятия закрепляются при решении упражнений с числовыми множествами.

Все упражнения составлены на примерах дискретных, конечных множеств (натуральных чисел). Это позволяет детям, пользуясь заданием множества с помощью перечисления элементов, фактически определить, принадлежит или нет то или иное число данному множеству чисел, включается или нет одно множество в другое. Они в состоянии фактически выполнять операции объединения и пересечения множеств, составлять дополнение одного множества до другого.

Усвоение этих отношений и операций на конечных множествах является подготовкой к их усвоению в дальнейшем на бесконечных множествах.

Экспериментальная проверка строилась по следующей методике:

а) устное решение упражнений с разъяснением понятий на жизненных примерах (разумеется, без определений);

б) устное и письменное решение упражнений с использованием уже разъясненных понятий на примерах числовых множеств;

в) проверка усвоения с помощью самостоятельной работы.

Результаты серии самостоятельных проверочных работ свидетельствуют о хорошем усвоении учащимися всей программы.

§ 3. Ниже приводится система упражнений (по два-три упражнения из каждого типа) со всеми разъяснениями, которые давались учащимся в процессе решения, и некоторыми методическими комментариями и выводами, следующими из проведенного эксперимента.

01. Вам уже встречалось, наверное, слово «множество» (множество чего-то или множество кого-то). Множество чего вы видите в лесу, на ночном небе, на птицеферме, на первомайской демонстрации?

В классной комнате также имеются примеры множеств. Какие?

Приведите еще примеры множеств.

Какие примеры множеств имеются на заводе, в поле, на аэродроме, в морском порту? Что вы видите на цветущей яблоне в саду?

01.1. Эти вопросы не встретили затруднений у учащихся. Так, в лесу они отметили не одно, а несколько множеств: множество грибов, множество ягод, множество деревьев, множество птиц, множество листьев, иголок (в хвойном лесу). На вопрос, какие примеры множеств имеются в классной комнате, они назвали множество парт, множество учеников, множество тетрадей, ручек, лампочек.

02. В русском языке, как и в других языках, имеются специальные слова, обозначающие некоторые определенные множества. Например, множество жителей одного города называют населением этого города, множество птиц, держащихся вместе,—стаей, множество станков одного завода — станочным парком этого завода.

Не знаете ли вы еще слова, обозначающие определенные множества? Как называют множество пионеров одного класса? Множество пионеров одной школы?

Какими словами обозначаются множество автомашин или тракторов, множество коров, множество овец в колхозе?

03. Мы говорим, что каждое дерево в лесу п р и н а д л е ж и т множеству деревьев этого леса. Если же какое-нибудь дерево не находится в этом лесу, то оно н е п р и н а д л е ж и т множеству деревьев этого леса.

Каждый житель города Могилева принадлежит множеству жителей этого города (населению города). Если же кто-нибудь живет в г. Минске, то, разумеется, он не принадлежит к населению города Могилева.

Какому множеству принадлежит каждый ученик IV-Д класса?

Составьте предложение, в которое входили бы:

а) имя ученика IV-Д класса и слова: «принадлежит» и «множество»;

б) имя ученика IV-Д класса и слова: «не принадлежит» и «множество».

04. Запишем несколько чисел: 5, 2, 8, 17, 13.

Что образуют эти числа?

Обозначим это множество буквой A и запишем его так:

$$A: 5,\ 2,\ 8,\ 17,\ 13.$$

Число 5 принадлежит множеству А, число 3 не принадлежит этому множеству. В дальнейшем для обозначения принадлежности числа к множеству чисел применим такой знак: «$\in$», так что предложение «число 5 принадлежит множеству A» будем писать так: «$5 \in A$». Для обозначения непринадлежности, т. е. для отрицания принадлежности числа к множеству чисел, применим тот же знак, только перечеркнутый «$\notin$», так что предложение «число 3 не принадлежит множеству A» записывается следующим образом: «$3 \notin A$».

Запишите, принадлежат или нет множеству A числа: 3, 4, 8, 10, 13, 14, 15.

04.1. Мы воздержались от обозначения множества с помощью фигурных скобок потому, что эксперимент был ограничен во времени, и мы опасались концентрации большого числа новых символов, к тому же применение фигурных скобок вызвало бы излишнюю затрату времени. В обычных условиях можно вводить общепринятое обозначение. Введенный же знак принадлежности и его отрицания дает экономию в записи. Это свойство символов учащиеся быстро заметили и, когда при изучении отношения включения мы воздержались от введения соответствующего символа, учащиеся обратились с вопросом, нельзя ли включение одного множества в другое обозначить знаком принадлежности. Когда им объясняли, что отношение принадлежности объекта к множеству и отношение включения одного множества в другое — разные отношения и поэтому нельзя их обозначать одним и тем же знаком, некоторые учащиеся предложили обозначить включение каким-нибудь другим знаком.

Учащиеся уже заметили одно преимущество символики — краткость записи, дающую экономию места и времени. Они хорошо восприняли применение символических обозначений, запомнили начертание и смысл символов.

Мы также воздержались на этом этапе от введения термина «элемент множества».

05. В предыдущем упражнении (04) мы задали множество чисел перечислением всех чисел этого множества. Можно также задать множество чисел, назвав свойство, которым обладают все числа этого множества и не обладают никакие другие числа. Например, вместо того, чтобы перечислить числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, можно сказать, что задано множество всех однозначных чисел и, обратно, по свойству однозначности можем перечислить все числа, обладающие этим свойством.

Запишите все числа, принадлежащие:

а) множеству четных однозначных чисел;

б) множеству нечетных однозначных чисел;

в) множеству однозначных чисел, делящихся на 3;

г) множеству чисел, меньших 30 и делящихся на 4;

д) множеству двузначных чисел, делящихся на 5;

е) множеству остатков, которые могут получиться при делении любого числа на 5, на 6, на 10.

06. Возьмем какое-нибудь число, например 18. Любое число, на которое число 18 делится без остатка, называется д е л и т е л е м числа 18. Запишите множество всех делителей числа 18, числа 24, числа 48.

07. Как можно назвать (с помощью какого свойства можно описать) множества:

A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
B: 1, 3, 5, 7, 9;
C: 2, 4, 6, 8;
D: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

07.1. Вопрос 07 допускает неоднозначные ответы. Например, множество D некоторые учащиеся назвали множеством первых шести однозначных чисел, другие — множеством всевозможных остатков, которые могут получиться при делении любого числа на 7. Мы заметили, что оба ответа правильны, так как при делении любого числа на 7 остатками могут быть первые шесть однозначных чисел.

08. Каждый ученик IV-Д класса является также и учеником СШ № 2. Является ли каждый ученик СШ № 2 учеником IV-Д класса? Почему не является?

В таком случае говорим, что множество учеников IV-Д класса в к л ю ч а е т с я в множество учеников СШ № 2, а множество учеников СШ № 2 н е в к л ю ч а е т с я в множество учеников IV-Д класса.

То множество, которое включается в другое, называется также его п о д м н о ж е с т в о м. Таким образом, множество учеников IV-Д класса является подмножеством множества учеников СШ № 2.

Рассмотрим также два множества: множество жителей города Могилева и множество жителей БССР. Какое из этих двух множеств включается в другое или является его подмножеством? В какое другое множество включается множество жителей БССР? Укажите какое-нибудь подмножество множества жителей города Могилева.

Приведите примеры двух множеств, чтобы одно включалось в другое (чтобы одно было подмножеством другого).

09. Даны два множества чисел:

A: 1, 4, 2, 3, 6, 7 и B: 3, 1, 4, 7.

Какие числа из множества B принадлежат и множеству A? Есть ли в множестве B числа, не принадлежащие множеству A? Есть ли в множестве A числа, не принадлежащие множеству B? Можно ли сказать, что какое-нибудь из этих множеств включается в другое? Какое именно? Почему нельзя сказать, что множество A включается в множество B? Какое из этих множеств является подмножеством другого?

10. Укажите, какое из двух множеств включается в другое:

а) A: 3, 5, 1; B: 1, 2, 3, 6, 5, 8;
б) A: 2, 3, 7, 6, 5, 1; B: 1, 4, 2, 5, 8, 9;
в) A: 5, 1, 2, 4, 3; B: 1, 2, 3, 4, 5.

В последнем случае *(в)* множество A включается в множество B и множество B включается в множество A.

Это значит, множества A и B состоят из одних и тех же чисел. В таком случае они называются р а в н ы м и, и мы пишем $A = B$.

Приведите примеры двух множеств чисел, чтобы:

а) первое включалось во второе, но второе не включалось в первое;

б) ни одно не включалось в другое;

в) первое включалось во второе и второе — в первое.

11. Даны четыре множества: пионерская дружина СШ № 2, пионерский отряд № 17 IV-Д класса, пионерская организация БССР и пионерская организация города Могилева. Назовите эти множества в таком порядке, чтобы первое включалось во второе, второе — в третье и третье — в четвертое.

12. Даны четыре множества чисел:

A: 2, 1, 3, 4, 5, 6, 8;

B: 1, 3, 2, 4;

C: 5, 6, 8, 2, 9, 1, 3, 4;

D: 5, 4, 3, 2, 1.

Расположите эти множества в таком порядке, чтобы первое было подмножеством второго, второе — подмножеством третьего и третье — подмножеством четвертого.

13. Даны два множества: A: 1, 2, 3 и В: 1, 2, 3, 4, 5. Какое из этих множеств включается в другое? Допустим, что какое-то третье множество C таково, что множество B включается в множество C. Что еще тогда можно сказать о множествах A и C? Как вы нашли, что и множество A включается в множество C?

Имеется некоторое множество E, такое, что ни одно число из множества B не принадлежит множеству E. Что тогда можно сказать о множествах A и E? Как вы узнали, что ни одно число из множества A не принадлежит множеству E, хотя вы не знаете, из каких чисел состоит множество E?

14. Даны два множества чисел:

A : 2, 1, 3, 5, 4, 7, 9, 6, 8;

B : 1, 3, 9, 4, 8.

Каким является множество B по отношению к множеству A?

Составьте множество C всех чисел, которыми нужно дополнить множество B, чтобы получить множество A.

Множество C называется д о п о л н е н и е м множества B до множества A.

Приведите примеры двух множеств чисел A и B, чтобы множество A включалось в множество B и составьте дополнение множества B до множества A.

15. Дано множество чисел: A; 1, 4, 3, 2, 5, 9, 8, 12, 15. Буквой «x» обозначим всякое число этого множества. Составьте множество B всех чисел, которые удовлетворяют условию $x < 5$, т. е. при подстановке каждого из них вместо x получается истинное высказывание (например, $1 < 5$). Чем является множество B по отношению к множеству A? Составьте дополнение множества B до множества A.

Выделите из множества A подмножество тех чисел x, которые удовлетворяют условию $x < 7$. Составьте дополнение этого подмножества до множества A. Каким свойством обладают числа этого дополнения?

15.1. Учащиеся не были знакомы со знаками отношений «меньше» и «больше». Перед решением упражнения 15 мы сравнили некоторые числа, установили, какое из двух чисел меньше, какое больше, и ввели символические обозначения « $<$ » и « $>$ ». Учащимся также было предложено поставить отсутствующий знак в предложениях:

а) если $3 < a$, то a...3; *б*) если $5 > b$, то b...5; *в*) если $a < 3$ и $3 < b$, то $a...b$; *г*) если $x > 7$ и $7 > y$, то $x...y$.

16. Имеются два списка: список учащихся IV-Д класса, которые хорошо поют, назовем его списком A, и список учащихся IV-Д класса, которые хорошо танцуют, назовем его списком B.

а) Требуется составить список учащихся IV-Д класса, которые поют или танцуют (хотя бы одно из двух). Как вы составите этот список, имея списки A и B?

б) Требуется составить список учащихся IV-Д класса, которые и поют и танцуют. Как вы составите этот список, имея список A учащихся, которые поют, и список B учащихся, которые танцуют?

16.1. Отвечая на вопрос 16 *а*, учащиеся говорили, что для составления списка тех, кто поет или танцует, надо выписать все фамилии из списка A и добавить к ним фамилии учащихся из списка B. На вопрос, сколько раз запишут в новом списке фамилию ученика, который числится и в списке A и в списке B, учащиеся ответили правильно и, таким образом, был уточнен порядок составления нового списка: выписывают все фамилии учеников из списка A и дополняют их теми фамилиями из списка B, которых нет в A. На вопрос, нельзя ли иначе составить новый список, учащиеся предложили выписать сначала все фамилии из списка B и добавить к ним те фамилии из списка A, которых нет в B.

Отвечая на вопрос 16 *б*, учащиеся говорили, что для составления списка тех, кто и поет и танцует, они выпишут те фамилии, которые числятся и в списке A и в списке B. На вопрос, как найти все такие фамилии, учащиеся предложили взять по порядку каждую фамилию из списка A и проверить, нет ли ее в списке B. Если есть, то ее записывают в новый список (тех, кто поет и танцует), если этой фамилии нет в списке B, то ее не записывают в новый список. Здесь также выяснилась возможность проверить по порядку каждую фамилию из списка B, нет ли ее в списке A.

17. Даны два множества чисел:

$A: 1, 2, 5, 6, 4$ и $B: 8, 2, 6, 9, 5, 10, 7$.

а) Составьте множество всех чисел, принадлежащих множеству A или множеству B (хотя бы одному из них), причем, если число принадлежит и множеству A и множеству B, запишите его один раз.

Это новое множество называется о б ъ е д и н е н и е м множеств A и B и обозначается знаком «$A \cup B$».

б) Составьте множество всех чисел, принадлежащих и множеству A и множеству B.

Это множество называется п е р е с е ч е н и е м множеств A и B и обозначается знаком «$A \cap B$».

18. Имеются два списка учащихся: список A учащихся IV-Д класса, являющихся читателями школьной библиотеки, и список B учащихся IV-Д класса, являющихся читателями городской библиотеки.

а) Как можно озаглавить список, составленный с помощью объединения множеств A и B?

б) Как можно озаглавить список, составленный с помощью пересечения множеств A и B?

в) Как узнать, какие ученики IV-Д класса не берут книг ни в школьной, ни в городской библиотеках? Какими способами можно составить этот список?

19. Запишите множество A всех делителей числа 18 и множество B всех делителей числа 24.

Составьте пересечение этих двух множеств.

Мы получили множество всех о б щ и х д е л и т е л е й чисел 18 и 24. Назовите наибольший общий делитель этих двух чисел.

20. Пусть A — множество делителей числа 18,

B — множество делителей числа 24,

C — множество делителей числа 30.

Найдите множество $(A \cap B) \cap C$, т. е. сначала найдите пересечение множеств A и B, затем пересечение этого множества с множеством C.

Найдите множество $A \cap (B \cap C)$, т. е. сначала найдите пересечение множеств B и C, затем пересечение множества A и этого множества.

Что можно сказать о множествах $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$? Как можно назвать это множество? (С помощью какого свойства можно описать это множество?)

Назовите наибольший общий делитель чисел 18, 24, 30.

21. Пусть дано множество чисел A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Выделите из этого множества подмножество B чисел x, удовлетворяющих условию $x > 3$. Назовите все числа, принадлежащие дополнению множества B до множества A.

Выделите из множества A подмножество C чисел x, удовлетворяющих условию $x < 7$.

Как найти множество чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из условий $x > 3$ или $x < 7$?

Как найти множество чисел, удовлетворяющих обоим условиям $x > 3$ и $x < 7$?

21.1. При решении упражнения 21 мы применили следующую запись:

A : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

B $(x > 3)$: 4, 5, 6, 7, 8.

C $(x < 7)$: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$B \cup C$ ($x > 3$ **или** $x < 7$): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

$B \cap C$ ($x > 3$ **и** $x < 7$): 4, 5, 6.

Затем была построена геометрическая модель множеств A, B, C, $B \cup C$ и $B \cap C$ с помощью множеств точек на прямой.

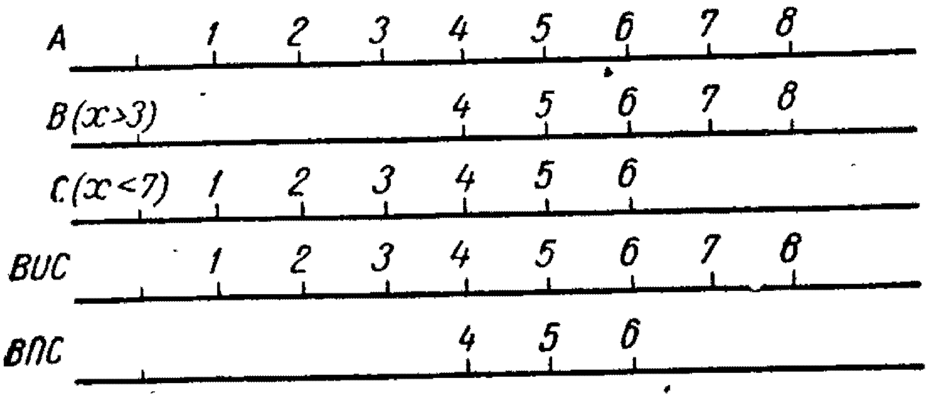


Рис. 2.

От начальной точки на прямой откладываем вправо (рис. 2) отрезки в 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 *см* и отмечаем полученные точки соответствующими числами. Получаем множество A точек на прямой. (Говорим: точка 1, точка 2 и т. д.).

Подмножеству B принадлежат все те точки этого множества, которые лежат правее точки 3. Выясняется, какие точки множества A принадлежат подмножеству C, как получить из множеств точек B и C их объединение и пересечение.

21.2. Необходимо отметить особое значение упражнений типа 21. В упражнениях этого типа: *а*) устанавливается связь объединения множеств с дизъюнкцией высказываний, выражающих характеристические свойства этих множеств, пересечения множеств с конъюнкцией этих высказываний; *б*) вырабатывается понимание решения неравенства и системы неравенств в заданном множестве чисел; *в*) геометрическая модель, заменяющая множество чисел множеством точек прямой, содействует лучшему пониманию операций объединения и пересечения множеств.

22. Дано множество, состоящее из трех цифр (однозначных чисел): 1, 2, 3. Составьте всевозможные двузначные числа, которые можно записать с помощью этих цифр. Сколько вы получили таких двузначных чисел?

Чтобы не ошибиться и получить все требуемые двузначные числа, выпишем эти числа в столбиках в следующем порядке: в первом столбике запишем все двузначные числа, имеющие цифру десятков 1, во втором — все числа с цифрой десятков 2, в третьем — все числа с цифрой десятков 3. Получаем три столбика по три числа в каждом, т. е. всего 9 двузначных чисел, образованных из цифр 1, 2, 3.

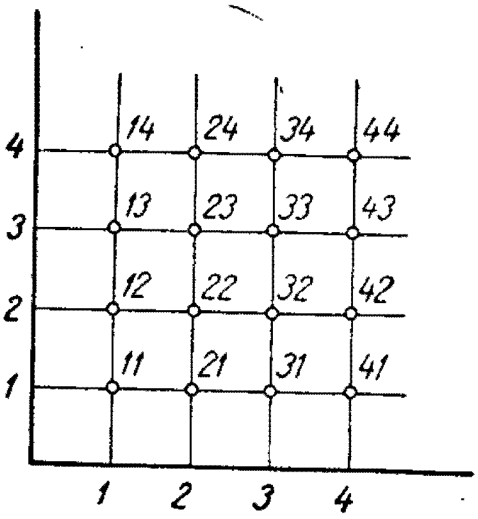


Рис. 3.

Составьте таким же способом все двузначные числа, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4. Сколько их?

Покажем еще один способ составления всевозможных двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр из данного множества, например 1, 2, 3, 4.

Проведем две прямые под прямым углом: одну горизонтальную, другую вертикальную (рис. 3). Первую назовем горизонтальной осью, вторую — вертикальной осью. От точки пересечения отметим на каждой из этих осей на равных расстояниях в 1 *см* (на горизонтальной оси вправо, на вертикальной — вверх) точки 1, 2, 3, 4. Через отмеченные точки на горизонтальной оси проведем вертикальные прямые, а через отмеченные точки на вертикальной оси — горизонтальные прямые. Каждой вертикальной и горизонтальной прямой присвоим номер, равный отметке той точки оси, через которую проходит эта прямая. Получилась решетка. Точки, в которых пересекаются вертикальные и горизонтальные прямые, назовем узлами решетки. Каждому узлу присвоим имя, дадим название в виде двузначного числа, составленного следующим образом: цифрой десятков служит номер вертикальной прямой, а цифрой единиц — номер горизонтальной прямой, проходящих через данный узел.

Отметьте таким способом все узлы решетки (поставьте около каждого узла его имя).

23. Нарисуйте решетку для множества цифр: 1, 2, 3, 4, 5. Сколько узлов имеет эта решетка? Сколько всего двузначных чисел можно записать с помощью заданных цифр? Отметьте узлы решетки соответствующими двузначными числами.

Нарисуйте еще одну такую же решетку и отметьте на ней только те узлы, имена которых составлены из одинаковых цифр (число десятков равно числу единиц).

Нарисуйте еще одну такую же решетку и отметьте на ней только те узлы, в которых:

а) число десятков меньше числа единиц;

б) число десятков больше числа единиц;

в) цифра десятков — 1;

г) цифра единиц — 1;

д) цифра десятков **или** цифра единиц — 1;

е) цифра десятков **и** цифра единиц — 1.

Что представляет собой множество отмеченных узлов в примере (*д*) по отношению к множествам отмеченных узлов в примерах (*в*) и (*г*)?

Что представляет собой множество отмеченных узлов в примере (*е*) по отношению к множествам отмеченных узлов в примерах (*в*) и (*г*)?

24. На решетке, соответствующей множеству цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, отметить:

а) узлы с четными названиями;

б) узлы с названиями, делящимися на 3.

Как из этих двух множеств получить множество узлов, названия которых делятся на 6?

22—24.1. В упражнениях типа 22—24 заложена важная идея образования множества всевозможных упорядоченных пар элементов данного множества (если данное множество — M, то множество всевозможных пар элементов из M обычно обозначается символом $M \times M$ и называется декартовым множеством, соответствующим множеству M) и выделения подмножеств этого множества пар с помощью различных отношений. Эта идея лежит в основе теоретико-множественной трактовки понятий отношения и функции.

Использованная в этих упражнениях решетка представляет собой по существу результат применения координатного принципа для точек плоскости с натуральными координатами из данного конечного множества натуральных чисел.

Представление о конечной решетке содействуют формированию понятия о бесконечной решетке, соответствующей всему множеству натуральных чисел, а затем и целых чисел. С введением новых чисел решетка будет уплотняться и в конце концов заполнит всю плоскость, когда каждой точке плоскости будет сопоставлена упорядоченная пара вещественных чисел, или комплексное число.

Выделение различных подмножеств узлов решетки содержит в себе важные идеи графического изображения функций и графического решения неравенств. Например, отмечая узлы, в которых число десятков равно числу единиц, мы по существу нашли график функции $y = x$, определенной на множестве чисел: 1, 2, 3, 4, 5; отмечая узлы, в которых число десятков меньше числа единиц, мы решили неравенство $x < y$ в множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5, так как нашли все точки, координаты которых удовлетворяют этому неравенству.

25. Следует отметить, что приведенная система упражнений характеризует начальный этап работы по формированию теоретико-множественных понятий у школьников. Поэтому мы воздержались на этом этапе от всего, что могло бы затруднять учащихся своим отличием от обычного понимания вещей, например от рассмотрения единичного и пустого множеств, ибо эти понятия противоречат обычному пониманию термина «множество», на который мы ссылались.

25.1. Приведенный перечень упражнений, разумеется, не исчерпывает все типы упражнений, которые можно решать на этом этапе, а содержит лишь основные. Эффективность приобретенных учащимися сведений зависит от того, какое они применение и расширение получат при дальнейшем обучении в V—X классах.

§ 4. В некоторых из приведенных выше (§ 3) упражнений применяется буква x для обозначения произвольного числа из некоторого заданного множества. По существу буквой обозначается не само число, а то место в математическом тексте, куда можно подставить имя произвольного числа из некоторого множества. В таком случае говорим, что буквой обозначается **переменная** для чисел, или **числовая переменная**.

К достижениям современной логики несомненно относится и уточнение понятия переменной, ее роли как важного средства математического языка для выражения общих предложений, относящихся ко всем элементам некоторого множества.

Недостаточность изучения математического языка как один из существенных дефектов традиционной методики преподавания состоит, в частности, в том, что не достигается формирования у учащихся правильного понятия о переменной.

Работа по формированию этого понятия должна вестись параллельно с работой по формированию первых теоретико-множественных понятий у учащихся начальных классов.

Ниже приводится описание одного из возможных вариантов начала этой работы.

01. Рассмотрим два высказывания: «Ученик Иванов получил сегодня оценку 5» (1) и «Ученик Петренко получил сегодня оценку 4» (2).
Что можете сказать об этих высказываниях?

Термин «высказывание» мы применяем здесь для обозначения интуитивно ясного понятия предложения, в котором «что-то о ком-то или о чем-то высказываем».

Опыт показывает, что еще до постановки вопроса, как только учитель записал на доске оба предложения, ученики сразу же говорят «неверно, что Петренко получил 4», «а Петренко не получил 4», «его не вызывали» и т. д.

Таким образом устанавливают, что высказывание (1) верно, или **и с т и н н о**, а высказывание (2) неверно, или **л о ж н о**. (Термины «истинно» и «ложно» как синонимы для «верно» и «неверно» могут быть введены и немного позже.)

02. Учитель записывает на доске следующие высказывания:

$$3 + 5 = 8, \quad (3)$$
$$3 + 6 = 8, \quad (4)$$

и спрашивает: «Что можно сказать об этих высказываниях?»

Очень важно научить учащихся видеть в записях вида (3) и (4) и других именно выражения высказываний на математическом языке, так же как в записях вида (1) и (2) — выражения высказываний на нематематическом языке.

После того, как учащиеся (разумеется, без всяких затруднений) определят, что высказывание (3) истинно, а (4) ложно, учитель записывает напротив (3) слово «истинно», напротив (4) — «ложно».

03. На доске появляется запись:

«Ученик . . . . получил сегодня оценку 5» (5).

На вопрос учителя, истинно или нет это высказывание, учащиеся обычно отвечают: «А какой ученик?», «Вы не записали фамилию ученика» и т. д.

Таким образом, они приходят к выводу, что о таком предложении с «пустым местом» нельзя сказать, что выраженное в нем верно или неверно (истинно или ложно). В нашем случае (5) мы знаем, что высказывается («получил сегодня оценку 5»), но не знаем, о ком высказывается. Поэтому предложение (5) представляет собой не высказывание, а лишь «форму» для высказывания. Если в этой форме заполнить пустое место, подставив фамилию какого-нибудь ученика, получим высказывание истинное или ложное, смотря по тому, действительно ли получил оценку 5 ученик, фамилию которого подставили.

04. Истинно или ложно равенство: $3 + ... = 8?$ (6).

Подставьте на пустое место число так, чтобы получилось истинное высказывание (истинное равенство), ложное высказывание. Можно ли подставить кроме числа 5 другое число, чтобы получить истинное высказывание?

Таким образом, выражение «$3 + ... = 8$» тоже представляет собой, как и (5), лишь форму для высказывания. После того как подставляем на пустое место число 5, получаем истинное высказывание: «сумма чисел 3 и 5 равна числу 8»; если же подставить другое число, например 6, получаем ложное высказывание: «сумма чисел 3 и 6 равна числу 8».

05. Опустим в форме для высказывания (5) цифру «5» и поставим вместо нее точки. Получим новую форму для высказывания с двумя пустыми местами:

«Ученик .... получил сегодня оценку .....» (7).

Из слов, которые остались в этой форме, понятно, как ее надо заполнять: на первом пустом месте разрешается записать фамилию ученика, на втором — одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, обозначающих оценки, которые ученики могут получить за свои ответы или письменные работы. При этом могут получиться как истинные, так и ложные высказывания.

Заполняйте эту форму так, чтобы получилось истинное высказывание, ложное высказывание.

06. Игра «Заполнение формы с закрытыми глазами». Для этой игры можно использовать форму для высказывания (7). Заполнение формы «с закрытыми глазами» состоит в том, что один ученик заполняет первое пустое место, а второй, не зная, как заполнено первое место, заполняет второе пустое место.

Эту же игру затем целесообразно провести и на математическом предложении с пустыми местами, например: $3 + ... = ...$, где на первое место (слева от знака равенства) разрешается подставить любое число из множества A: 5, 6, 7, 8, 9, 10, а на второе место — любое число из множества B: 13, 12, 11, 10, 9, 8.

По окончании этой игры можно заметить, что из получаемых заполнением формы «с закрытыми глазами» высказываний подавляющее большинство ложны. Поэтому для получения истинного высказывания форму заполнять подобным образом нельзя.

07. Что можно сказать о каждом высказывании: $3 + 4 = 4 + 3$; $3 + 5 = 5 + 3$; $3 + 6 = 6 + 3$; $3 + 7 = 7 + 3$? Выпишем сначала общее для всех этих записей, а то, чем они отличаются, опустим и заменим точками.

Получаем следующую форму для высказываний:

$$3 + ... = ... + 3.$$

Если в этой форме подставить любое число, одно и то же слева и справа от знака равенства, то получим истинное высказывание, верное равенство.

Очевидно, если вместо числа 3 подставить любое другое число, получим верное равенство. Но если и вместо числа 3 оставить «пустое место», то получим форму: «$... + ... = ... + ...$» и не будем знать, на какие пустые места надо подставлять одно и то же число, а на какие — различные числа. Поэтому лучше по-разному изобразить пустые места, на которые подставляются различные числа. Например, полученную выше форму можно изобразить так:

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square,$$

где в пустой «квадратной коробке» подставляется одно какое-либо число, только одно и то же в каждой квадратной коробке, а в каждой «круглой коробке» — тоже одно и то же число, например:

$$\boxed{5} + (7) = (7) + \boxed{5}.$$

В математике для большего удобства вместо пустых «коробок» разной формы применяются разные буквы. Например, полученную выше форму для высказываний записывают так: $a + b = b + a$ или с помощью каких-нибудь других букв, например: $x + y = y + x$. Буквы $a, b, ..., x, y, ...$

называются **переменными**, а числа, названия которых можно подставить вместо этих букв,— их **значениями**.

08. Рассмотрим форму для высказываний (предложение с переменной) $7 + x = 12$ на множестве A: 6, 7, 8, 9, 10, т. е. значениями переменной x являются числа из множества A.

Обращается ли это предложение при каком-либо значении переменной x в истинное высказывание? Если же рассматривать это предложение на множестве B: 1, 2, 3, 4, 5, 6, то при каком значении переменной x оно обратится в истинное высказывание?

09. Рассмотрим предложение «$x < 7$» на множестве A: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Заполните следующую таблицу, обозначив «истинное высказывание» через «И», а «ложное высказывание» через «Л».

Какое число подставляется вместо x?	Результат подстановки	Какое высказывание получается — истинное или ложное?
3	$3 < 7$	И
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10	$10 < 7$	Л

10. Заполнить такую же таблицу, как в 09, для предложения «$x > 3$» на множестве B: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Как видно, вместе с началом формирования понятия переменной описанная работа содержит и начало формирования понятия об уравнении и неравенстве, но это лишь начало, которое должно найти в процессе дальнейшего обучения правильное развитие.

Глава 3. Применение и дальнейшее расширение теоретико-множественных понятий при изучении числовых множеств

§ 1. Число — основное понятие математики как науки и как учебного предмета в школе.

Развитие понятия числа в сознании учащихся в некоторой степени повторяет историческое развитие, которое это понятие прошло в течение тысячелетий, начиная с первых шагов практической деятельности людей, когда формировалось понятие натурального числа, как отражение простейших потребностей этой деятельности.

Вполне естественно, что и современное учение о числе базируется на арифметике натуральных чисел.

Множество натуральных чисел описывается аксиоматически. (Аксиоматика арифметики натуральных чисел будет рассмотрена во второй части.)

Дальнейшее развертывание учения о числе состоит в последовательном расширении множества натуральных чисел по следующей схеме: $N \subset C \subset R \subset D \subset K$,

где N — множество натуральных чисел;
C — множество целых чисел;
R — множество рациональных чисел;
D — множество вещественных чисел;
K — множество комплексных чисел.

(Современное учение о числе не ограничивается множеством комплексных чисел, рассматривая еще и гиперкомплексные системы.)

Множество натуральных чисел служит фундаментом, на котором строятся все другие множества. Это построение удовлетворяет четырем условиям.

Пусть множество A расширяется до множества B, тогда эти четыре условия сформулируются следующим образом:

1. Множество A есть подмножество множества B $(A \subset B)$.
2. Все операции и отношения элементов из A определены также и для элементов множества B, причем их смысл для элементов из A, рассматриваемых уже как элементы расширенного множества B, должен совпадать с тем, какой они имели в множестве A до расширения.
3. В множестве B выполнима операция, которая невыполнима или не всегда выполнима в множестве A. (В этом условии заключена основная цель расширения множества A.)
4. Расширение B должно быть минимальным среди всех расширений множества A, удовлетворяющих условиям 1—3, т. е. таким, чтобы не существовало никакое подмножество B, содержащее A и удовлетворяющее тем же условиям. (Исходя именно из условия 4, отражающего логическую завершенность схемы расширения, множество натуральных чисел расширяется до целых, а не сразу до рациональных или действительных чисел.)

Конструкция расширения числового множества может быть осуществлена различными путями. Одна из идей, лежащих в основе этих конструкций, получила название **теории пар**.

Согласно этой идее, целое число определяется как пара натуральных чисел (их разность), рациональное число — как пара целых чисел (их частное), вещественное число — как пара классов рациональных чисел (сечение), комплексное число — как пара вещественных чисел $(a, b) = a + bi$ (всюду под «парой» имеется в виду «упорядоченная пара»).[1]

§ 2. В установившейся школьной практике до сих пор сохраняется историческая последовательность развития поня-

[1] И. В. Проскуряков. Понятия множества, группы, кольца и поля. Теоретические основы арифметики. ЭЭМ, кн. 1. М., 1951.

тия числа, отличающаяся от приведенной выше схемы тем, что дроби исторически появились намного раньше отрицательных чисел. Уже древнегреческие математики пользовались положительными дробями, в то время как многие математики XVI в. не признавали еще отрицательных чисел.

Исправлением исторической схемы развития понятия числа достигнута бо́льшая логическая стройность с точки зрения алгебраической структуры, определяемой в числовых множествах операциями сложения и умножения. Первая введенная в множестве натуральных чисел операция — сложение. Расширением множества натуральных чисел до множества целых чисел получаем группу $[C,+]$ целых чисел относительно сложения.

Возникает вопрос: нельзя ли привести в соответствие схему развития понятия числа в школьном курсе с развитием этого понятия в современной науке?

Школьная схема обычно обосновывается педагогическими соображениями, исходящими из того, что понятие дроби (положительной) доступнее пониманию учащихся, чем понятие отрицательного числа. Вообще, соображения психолого-педагогического порядка, касающиеся доступности учебного материала, могут несомненно служить достаточным основанием и для отклонения в школьном преподавании от логики научной системы.

Однако в данном случае вряд ли такое отклонение оправдано. Его можно оправдать, если главное внимание в обучении уделять отдельному числу, а не структуре числового множества. Неправильное определение большей доступности дробей связано здесь с тем, что традиционная методика считает предметом изучения дроби, а не множество положительных рациональных чисел, отрицательные числа, а не множество целых чисел. В действительности же, изучая отношение порядка и операции, мы изучаем структуру множества и доступность определяется простотой этой структуры.

В нашем случае структура множества целых чисел проще структуры множества положительных рациональных чисел, так как первое — дискретное множество, а второе — плотное.

Когда говорят, что дробь легче представить наглядно с помощью различных пособий, то уместно спросить: что нагляднее изображается с помощью точек прямой — дискретное множество целых чисел или же плотное, но не непрерывное множество рациональных чисел? К тому же следует иметь в виду, что именно изображение чисел точками прямой является наиболее важным наглядным пособием при изучении числовых множеств.

В последнее время разрабатывается методика и проводится экспериментальная работа по введению в школьном обучении отрицательных чисел раньше дробей. Весьма интересный эксперимент проводится в настоящее время К. И. Нешковым в СШ № 444 г. Москвы, где в IV классе отрицательные числа изучаются раньше дробей.

§ 3. Усовершенствование методики изучения числовых множеств предполагает применение и дальнейшее расширение теоретико-множественных понятий, имеющихся уже у учащихся в результате предшествующей подготовки.

Рассмотрим следующие вопросы:

А. Разъяснение идеи развития понятия числа.

Б. Изучение свойств структуры числовых множеств.

В. Изучение отношений между различными числовыми множествами.

А. Описанная выше (§ 1) общая схема расширения данного числового множества предполагает построение нового множества, содержащего в качестве подмножества данное множество (вообще множество, изоморфное данному).

Этот путь расширения числового множества нашел отражение в способе построения множества рациональных чисел, изложенном в учебнике А. П. Киселева.[1] Вначале создается впечатление, что и отрицательные и положительные числа суть новые числа, и только впоследствии положительные числа отождествляются с ранее известными. Однако это первое впечатление способствует формированию у учащихся неправильного представления о том, что положительные числа отличны от известных из арифметики чисел, иногда неправильно называемых «числами без знака». или «арифметическими». (Здесь сказывается и искусственное, совершенно не оправдывающее себя ни с научной, ни с педагогической точки зрения, традиционное разделение учения о числе на две части, включаемые одна в арифметику, другая в алгебру.)

Педагогические соображения подсказывают нам иной путь расширения понятия о числе в школьном обучении. Вместо того, чтобы образовать новое расширенное числовое множество, содержащее данное в качестве подмножества, мы дополняем известное нам числовое множество новыми числами, получая таким образом новое расширенное множество.

Иначе говоря, вместо того, чтобы конструировать расширенное множество B, а затем показать, что $A \subset B$, где A — исходное множество, мы дополняем множество A множеством $\bar{A}$ и образуем расширенное множество $B = A \cup \bar{A}$. Поэтому мы не говорим, например, «введение целых чисел», а употребляем «введение отрицательных чисел» и «образование понятия о множестве целых чисел».

---

[1] А. П. Киселев. Алгебра. Ч. I. М., 1954, стр. 15.

Важнейшим моментом процесса расширения понятия о числе в школьном обучении является разъяснение основной цели этого расширения, т. е. присоединения к множеству A множества $\overline{A}$ новых чисел.

Мы не можем ограничиваться в обучении чисто формальным обоснованием необходимости введения новых чисел для обеспечения выполнимости операций. Учащимся было бы непонятно, почему мы добиваемся, чтобы, например, операция вычитания всегда выполнялась. Может быть, практика, жизнь никогда не требует, чтобы мы умели вычитать из меньшего числа большее. В таком случае различные расширения числового множества выглядели бы для учащихся чисто теоретическими увлечениями, не вызванными потребностями практики.

Поэтому в школьном обучении перед введением новых чисел приводятся обычно примеры практических задач, неразрешимых или не всегда разрешимых в известном множестве чисел. Чтобы сделать эти задачи всегда разрешимыми, мы и расширяем имеющееся множество чисел. Однако эти потребности практики обычно не переводятся на математический язык, т. е. не показываются, что они равносильны выполнимости определенной математической операции. Например, необходимость введения отрицательных чисел обосновывается обычно с помощью задач, в которых фигурируют направленные величины, изменяющиеся в двух противоположных направлениях, однако при этом не показывают, что неразрешимость этих задач в множестве неотрицательных чисел обусловлена тем, что вычитание не всегда выполнимо в этом множестве.

Иногда в школьном обучении необходимость введения новых чисел объясняется, с одной стороны, потребностями практики, а с другой стороны, как будто не связанными с ними потребностями математики.

В этом рассуждении содержится методологическая ошибка, ибо в нем потребности математики рассматриваются в отрыве от потребностей практики. Разумеется, в математике имеются внутренние потребности, которые непосредственно не обусловлены практикой. Примером могут служить мнимые числа, которые возникли исключительно из внутренних потребностей математики. Однако в конечном итоге потребности математики обусловлены потребностями практики. Мнимые числа получили впоследствии весьма реальное истолкование и важные приложения.

На примере развития понятия о числе мы и должны показать, как математика развивает и совершенствует свой аппарат под влиянием потребностей практики.

Получается следующая схема обучения: от потребностей практики в разрешимости задач к потребностям математики в выполнимости операций и от этих последних к новым числам, вооружающим математику средствами для удовлетворения потребностей практики.

Детальная реализация этой схемы не входит в предмет нашего исследования.

Б. 1. Все изучаемые числовые множества упорядочены отношением «меньше» ($<$) или «больше» ($>$). Очевидно, что никаких затруднений не вызывает изучение свойств этого отношения. Уже в начальных классах на множестве натуральных чисел можно показать, что для любых двух различных чисел a и b имеет место: 1) $a < b$ или $b < a$ и 2) если $a < b$, то $b \nless a$ ($b > a$) и 3) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Разумеется, буквенная запись последует после достаточного числа конкретных примеров. Эти свойства легко переводятся самими учащимися на геометрический язык при изображении натуральных чисел точками полупрямой. (Из двух различных точек a и b: 1) a лежит левее b или b лежит левее a, 2) если a лежит левее b, то b не лежит левее a (b лежит правее a) и 3) если a лежит левее b и b лежит левее c, то a лежит левее c.

Целесообразно разъяснить, что отношение «меньше» устанавливает определенный порядок в множестве натуральных чисел. Это можно сделать, предлагая учащимся упорядочить с помощью этого отношения заданное конечное множество натуральных чисел. Запись подсказывает нам правомерность говорить «b следует за a» или «a предшествует b», если $a < b$.

На базе отношения порядка («меньше») мы разъясняем более сложные отношения «лежит между» и «непосредственно следует за».

Отношение «лежит между» сложно в том смысле, что высказывание, выражающее это отношение через отношение «меньше», имеет сложную логическую структуру: «c лежит между a и b» означает «$a < c$ **и** $c < b$ **или** $b < c$ **и** $c < a$». Его название заимствовано из геометрического языка, наглядно изображается в геометрической интерпретации чисел точками прямой.

Отношение «непосредственно следует за» сложно в том же смысле: «b непосредственно следует за a» означает «$a < b$ **и не существует** числа x такого, что $a < x$ и $x < b$» или, используя отношение «лежит между», «$a < b$ **и не существует** числа x, лежащего между a и b». Его труднее истолковать с помощью геометрической интерпретации.

Действительно, что точка 3 лежит между (в обычном смысле) точками 2 и 4, ясно каждому ученику (IV—V класса) из наблюдения прямой с помеченными точками, но что точка 4 непосредственно следует за точкой 3 не будет понято учащимися из одного наблюдения прямой без дополнительных разъяснений.

На прямой между точками 3 и 4 имеются и другие точки. Приходится разъяснять, что среди этих точек нет ни одной, соответствующей натуральному числу. Очевидно, легче разъяснить отношение непосредственного следования без помощи геометрической интерпретации («4 непосредственно следует за 3, так как нет такого числа, которое было бы больше 3, но меньше 4»).

Знание рассмотренных выше отношений необходимо для изучения свойств структуры множества натуральных чисел. Необходимо рассмотреть следующие свойства, принимаемые обычно за основные, при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел:

а) множество натуральных чисел имеет начало (1). Это надо понимать так: единица не следует ни за каким другим числом;

б) за каждым натуральным числом непосредственно следует одно и только одно натуральное число (для всякого числа a существует только одно число $(a+1)$, непосредственно следующее за ним);

в) каждое натуральное число (кроме 1) непосредственно следует за одним и только за одним натуральным числом.

Свойства *а, б* и требование единственности из *в* составили содержание первых трех из четырех аксиом арифметики натуральных чисел, предложенных Пеано (1891).

Процесс формирования понятия о структуре множества натуральных чисел должен продолжаться в старших классах. В частности, аксиома индукции, выражающая одно из характеристических свойств этой структуры, может быть рассмотрена в связи с изучением метода математической индукции, формальной основой которого она является.

Свойства *б* и *в* выражают дискретность множества натуральных чисел (для каждого числа можем указать непосредственно следующее за ним число и число, за которым непосредственно следует данное). Термин «дискретное множество» может быть сообщен учащимся в старших классах; важно не знание термина, а понимание сущности свойства, обозначаемого этим термином.

Множество целых чисел, полученное после присоединения к множеству натуральных чисел, нуля и отрицательных (целых) чисел, обладает той же структурой порядка, как и множество натуральных чисел, за исключением начального элемента (предшествующего всем остальным), который отсутствует во множестве целых чисел.

Множество рациональных чисел, полученное путем дополнения множества целых чисел дробями, уже не обладает свойством дискретности, а является плотным, т. е. между любыми двумя числами лежит число (а следовательно, бесконечное множество чисел) этого множества. (Используя логический аппарат, можно показать, что высказывание, выражающее свойство плотности множества, есть точное отрицание высказывания, выражающего свойство дискретности.)

Представление о плотности множества рациональных чисел можно образовать у учащихся, показывая им в геометрической интерпретации, на конкретных примерах, что точка, соответствующая среднему арифметическому двух чисел, лежит между точками, соответствующими этим числам. Так, например, между точками, соответствующими числам 2 и 6, лежат точки, соответствующие средним арифметическим чисел 2 и 6, т. е. 4; 2 и 4, т. е. 3; 2 и 3, т. е. 2,5; 3 и 4, т. е. 3,5; 4 и 5, т. е. 4,5; 5 и 6, т. е. 5,5; 2 и 2,5, т. е. 2,25 и т. д.

Разумеется, продолжать этот процесс как угодно далеко практически невозможно. Отрезки с рациональными концами при последовательном делении их пополам становятся столь малыми, что с некоторого шага их концы кажутся совпадающими, а мы должны убедить учащихся в том, что между этими рациональными точками существует еще рациональная точка, и даже не одна, а бесконечное множество.[1]

Здесь явно выступает сложность структуры множества рациональных чисел по сравнению со структурой множества целых чисел, о чем было упомянуто выше (§ 2).

При изучении множества целых чисел нам встречается один тип бесконечности — бесконечность множества всех целых чисел. При изучении же множества рациональных чисел нам встречаются два типа бесконечности: *а*) бесконечность множества всех рациональных чисел и *б*) бесконечность множества рациональных чисел, лежащих между любыми двумя рациональными числами.

Для формирования понятия бесконечности, как известно, конкретные восприятия и основанные на них представления уже недостаточны, и они должны дополняться логическими ассоциациями. Но в первом случае понятие бесконечности множества всех рациональных чисел (как и всех целых чисел) подкрепляется понятием бесконечности прямой линии, в то время как во втором случае понятие бесконечности множества рациональных чисел, лежащих между двумя рациональными числами, не подкрепляется, а, наоборот, задержи-

[1] Применяем одну из основных абстракций математики и логики — абстракцию потенциальной осуществимости: отвлекаясь от того, что с некоторого шага продолжение процесса становится практически неосуществимым, считаем его потенциально осуществимым неограниченно.

вается конкретным восприятием конечного отрезка, содержащего это множество.

Этот пример является хорошей иллюстрацией к выводам наших психологов о том, что восприятие наглядного материала может играть в процессе понимания не только положительную, но и отрицательную роль.[1]

Здесь, как и всюду, где понятия связаны с категорией бесконечности в любом ее проявлении, конкретные восприятия и основанные на них представления не способствуют, а препятствуют подлинному пониманию, так как они всегда конечны. В этих случаях главную роль в обучении играют логические процессы.

При изучении свойства плотности множества рациональных чисел мы не должны ограничиваться частными примерами. После ознакомления учащихся с решением и доказательством алгебраических неравенств должно быть дано и общее доказательство того, что между любыми двумя рациональными числами a и b существует рациональное число. (Это сводится к доказательству двойного неравенства $a < \frac{a+b}{2} < b$, если $a < b$.) Таким образом, учитывая сложность свойства плотности, целесообразно рассмотреть его дважды: первый раз — после введения дробей в связи с формированием понятия о множестве рациональных чисел, второй — на более высоком логическом уровне, в связи с формированием понятия о множестве вещественных чисел.

Учащиеся склонны считать множество рациональных чисел не только плотным в себе, но и полным, т. е. покрывающим прямую без пробелов. Это ошибочное понимание тоже обусловлено наглядными представлениями. Точки, соответствующие рациональным числам (для краткости удобно их называть, как мы это уже сделали выше, рациональными точками), расположены на прямой настолько плотно, что кажется, что они уже не оставляют на прямой никаких пустых мест, т. е. что они исчерпывают все точки прямой. Опровергнуть это неправильное представление можно только логикой, доказательством существования на прямой точек, не соответствующих никаким рациональным числам. Это доказательство, как известно, может быть основано на несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

На отрезке OA, где A — рациональная точка (рис. 4), строим квадрат и диагональ его откладываем на прямой от точки O. Полученная точка A' не является рациональной, ибо диагональ квадрата (OA') несоизмерима с его стороной (OA). Так как рациональных точек A на пря-

---

[1] Н. А. Менчинская. Советская психология обучения. «Вопросы психологии», 1957, № 5, стр. 130—192.

мой бесконечное множество, то и точек A', которым не соответствуют никакие рациональные числа, также бесконечное множество. (Здесь, разумеется, не отражается тот факт, что эти множества неравномощны.)

Чтобы иметь возможность после введения иррациональных чисел показать, что множество вещественных чисел заполняет полностью без пробелов прямую, т. е. что оно обладает свойством полноты, необходимо в курсе геометрии, кроме аксиомы Архимеда, рассмотреть и аксиому Кантора о стягивающихся отрезках.

Это позволит ознакомить учащихся с изоморфизмом множеств вещественных чисел и точек прямой. (Понятие изоморфизма рассматривается дальше, ч. II, гл. 4.)

2. Мы рассмотрели вопрос об изучении структуры числовых множеств только с точки зрения отношения порядка (порядковые структуры). Рассмотрим вопрос об изучении структуры числовых множеств с точки зрения введенных в них операций (алгебраические структуры).

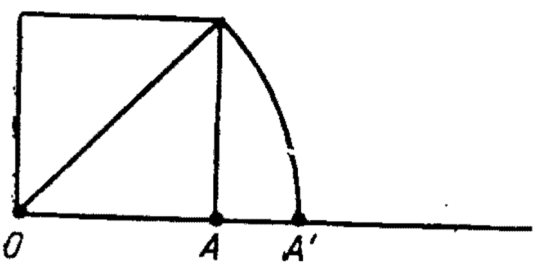


Рис. 4.

Традиционная методика преподавания не уделяет необходимого внимания понятию операции. Получается формальное усвоение учащимися отдельных свойств операций без понимания их значения. В частности, значение свойства ассоциативности остается невыясненным в практике обучения, хотя учащиеся и формулируют это свойство и применяют его. В школьной практике не применяется и термин «операция». Очевидно, через некоторое время после введения термина «действие» (арифметическое действие) целесообразно ввести и термин «операция» как синоним термина «действие», а в старших классах полностью перейти на применение термина «операция».

Остановимся кратко на современной научной трактовке общего понятия операции, с которой целесообразно ознакомить учащихся старших классов физико-математического профиля после того, как они уже познакомились с рядом операций, отличных от арифметических (операций алгебры множеств, алгебры логики).

В современной математике понятие операции в некотором множестве трактуется как закон композиции элементов этого множества, т. е. как закон или правило составления из двух элементов множества нового элемента этого же множества.

Если в множестве $M:=\{a, b, c, \dots\}$ введена некоторая операция $(\ast)$, это значит, что для любых двух элементов (a, b) этого множества операция $(\ast)$ выполнима, т. е. существует единственный элемент m в этом множестве, являющийся результатом применения этой операции (закона композиции) к элементам a и b, что обозначается обычно так: $a * b = m$. Применяемый здесь знак равенства надо понимать как знак совпадения элемента $a * b$ с элементом m данного множества. Так именно надо понимать, например, равенство $3 + 1 = 4$ Результат сложения чисел 3 и 1 совпадает с числом 4.

Если операция ($*$) коммутативна, то и $b * a = m$, т. е. $a * b = b * a$.

Коммутативное, или переместительное, свойство обычного сложения и умножения достаточно просто и не вызывает затруднений у учащихся начальных классов. Однако следовало бы привести учащимся и примеры операций, не являющихся коммутативными. Наиболее близкими им примерами являются операции, обратные сложению и умножению, т. е. вычитание и деление. Можно привести и пример другой операции, некоммутативность которой непосредственно следует из ее определения.

Пусть для любых элементов a и b данного множества имеет место $a * b = b$. Тогда согласно определению операции $*$ $b * a = a$ и для любых a и b таких, что $a \neq b$, т. е. для различных элементов a и b имеем $a * b \neq b * a$.

Если операция $*$ понимается как закон составления из двух элементов множества нового элемента, то возникает вопрос: как надо понимать выражение $a * b * c$? Это выражение не имеет пока точного смысла, ибо операция $*$ по определению применима лишь к двум элементам. Интуитивно ясно, что имеются два пути распространения закона композиции на три элемента, а именно, или определить элемент $m = a * b$, затем элемент $n = m * c$, т. е. понимать выражение $a * b * c$ как название элемента $(a * b)\ c$, или же определить элемент $p = b * c$, затем элемент $q = a * p$, т. е. понимать выражение $a * b * c$ как название элемента $a * (b * c)$. Ассоциативность операции устанавливает совпадение элементов n и q, т. е. $(a * b) * c = a * (b * c)$, и этим самым выражение $a * b * c$ получает определенный смысл. Ассоциативность позволяет распространить закон композиции на любое число элементов.

Следует разъяснять учащимся, почему можно опускать скобки в выражении $(a + b + c) + d$ и почему можно произвольным образом расставлять скобки в выражении $a + b + c + d$. Таким образом, ассоциативность играет важную роль, обеспечивая однозначность применения операции к любому конечному числу элементов множества.

При изучении арифметических операций мы должны постепенно готовить учащихся к возможным обобщениям для перехода к абстрактному понятию операции и изучению других конкретных операций, отличных от арифметических.

С этой целью весьма важно подчеркнуть аналогию в свойствах сложения и умножения:

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

аналогию в роли нуля по отношению к сложению и единицы по отношению к умножению:

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

0 — нейтральный элемент числового множества по отношению к сложению, 1 — по отношению к умножению. Термин «нейтральный элемент операции» весьма наглядно характеризует соответствующее свойство: при сложении с нулем и при умножении на единицу любой элемент остается без изменения, не переходит в другой элемент множества.

Наряду со сходством надо подчеркивать и различие.

В множестве целых чисел в отличие от множества натуральных чисел для каждого числа a существует единственное противоположное ему число $(-a)$, такое, что $a + (-a) = 0$, но нет аналогичного свойства по отношению к умножению на 1.

В множестве рациональных чисел, кроме этого свойства, имеется аналогичное свойство и по отношению к умножению: для всякого рационального числа a (отличного от 0) существует единственное обратное ему число $\frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Операции сложения и умножения не изолированы, они связаны между собой свойством распределительности (или дистрибутивности): «для любых трех чисел a, b, c имеет место: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Важно отметить здесь односторонность этого свойства, наличие дистрибутивности умножения относительно сложения и отсутствие дистрибутивности сложения относительно умножения.

Если имела бы место дистрибутивность сложения относительно умножения, мы бы записали это свойство так: «для любых трех чисел a, b и c, $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$». Очевидно, для доказательства ложности этого высказывания достаточно доказать истинность его отрицания: «существует три числа a, b и c таких, что $a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot (a + c)$». Например, при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $a + bc = 7$, а $(a + b) \cdot (a + c) = 12$. (Умение формулировать точное отрицание данного высказывания при различных логических структурах его эффективно вырабатывается применением аппарата современной логики. Это будет показано дальше (гл. 5).)

Изучение числового множества должно включать в себя выяснение вопроса о выполнимости операций в данном множестве, т. е. о замкнутости этого множества относительно определенных операций. Без этого невозможно разъяснить учащимся идею расширения понятия числа.

Целесообразны некоторые упражнения, в которых вопрос о выполнимости операций ставится для числового множества, составляющего некоторое подмножество известного учащимся на данном этапе обучения множества чисел. (Например: какие операции выполнимы в множестве четных чисел, нечетных чисел, отрицательных чисел, правильных дробей и т. д.)

Целесообразны и такие упражнения, в которых рассматриваются операции, отличные от обычных. Ниже приводятся несколько типов таких упражнений (их можно рассматривать в различных классах, преимущественно в старших).

1) В множестве, состоящем из двух чисел 0 и 1, введены две операции «$\cdot$» и «V», где «$\cdot$» — обычное умножение, а «V» определяется следующим образом: $x \vee y = x + y - x \cdot y$, где «+», «—» и «$\cdot$» — знаки обычных операций сложения, вычитания и умножения соответственно.

а) Доказать, что операции «$\cdot$» и «V» выполнимы в данном множестве и коммутативны.

б) Доказать, что имеют место два свойства дистрибутивности: $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ — дистрибутивность операции «$\cdot$» относительно операции «V» и $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ — дистрибутивность операции «V» относительно «$\cdot$».

в) Составить таблицу для выполнения операции «V» в заданном множестве.

Если в этом упражнении 0 и 1 интерпретировать как значения истинности высказываний (1 — истинно, 0 — ложно), то операция «$\cdot$» интерпретируется как конъюнкция, а «V» — как дизъюнкция высказываний.

2) В некотором множестве введены две операции:

$$x \bigcirc y = y \text{ и } x \square y = x.$$

Доказать, что обе эти операции некоммутативны и ассоциативны.

3) В множестве трех чисел 0, 1, 2 введены две операции: $x + y$ — остаток от деления суммы чисел x и y на 3 и $x \cdot y$ — остаток от деления произведения чисел x и y на 3.

а) Составить таблицы для выполнения этих операций в заданном множестве чисел.

б) Выполнимы ли эти операции в заданном множестве?

в) Выяснить, являются ли эти операции коммутативными, ассоциативными.

4) Выполнима ли в множестве целых чисел операция

$$a * b = \frac{a+b}{2}?$$

Выполнима ли эта операция в множестве четных, нечетных, рациональных чисел, вещественных чисел, меньших 1?

По окончании средней школы учащиеся должны уметь охарактеризовать известные им числовые множества примерно следующим образом:

а) Множество N натуральных чисел — *бесконечное, упорядоченное, дискретное, с начальным и без конечного элемента, замкнутое относительно сложения и умножения и незамкнутое относительно вычитания и деления.*

б) Множество C целых чисел — *бесконечное, упорядоченное, дискретное, без начального и без конечного элемента, замкнутое относительно сложения, умножения и вычитания, незамкнутое относительно деления.* (Вопрос о введении терминов «группа», «кольцо», «поля» не имеет принципиального значения.)

в) Множество рациональных чисел — *бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элемента, плотное в себе, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания и деления* (за исключением, разумеется, деления на 0, которое исключается).

г) Множество вещественных чисел — *бесконечное, упорядоченное. без начального и конечного элемента, плотное в себе, полное, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания, деления и операции определения предела любой сходящейся последовательности вещественных чисел.*

В. В процессе изучения различных числовых множеств возникает необходимость выяснения отношений между ними и выполнения различных операций над ними.

В связи с этим здесь, естественно, продолжается наша система упражнений, начало которой описано в гл. 2, заполняясь различным конкретным материалом, зависящим от изучаемого числового множества.

В этой системе упражнений преследуются три цели:

1) дальнейшее изучение элементов теории множеств,

2) применение этих знаний для лучшего понимания изучаемых числовых множеств,

3) подготовка к введению в логику высказываний.

На каждом этапе расширения понятия числа, полученного в результате дополнения ранее известного множества новыми числами, расширенное множество чисел служит у н и в е р с а л ь н ы м множеством, т. е. множеством всех чисел, известных учащимся на этом этапе обучения.

В дополнение к тому теоретико-множественному словарю, с которым уже знакомы учащиеся в связи с решением упражнений, описанных в гл. 2, в дальнейшем постепенно вводятся: термин «элемент множества», символ для обозначения уже известного учащимся отношения включения, понятия единичного и пустого множества, символ «$\underset{x}{M}[P]$» для обозначения множества элементов x, обладающих свойством P.

Ниже приводится продолжение системы упражнений, расположенных по этапам расширения понятия числа.

1. Универсальное множество — множество C целых чисел

01. Предметы, принадлежащие к некоторому множеству, называются элементами этого множества. Например, каждое натуральное число — элемент множества натуральных чисел. Каждый ученик класса — элемент множества учеников этого класса.

Каково различие между множеством учеников нашего класса и множеством всех натуральных чисел?

Можем ли мы определить число элементов множества учеников класса? А число элементов множества натуральных чисел?[1]

02. Обозначим число элементов конечного множества A символом $p(A)$. Пусть даны два конечных множества чисел:

$$A=\{-1, 2, -3, 0, -4, 6, -8, 10\} \text{ и } B=\{4, 25, 6, 28, 2, 0\}.$$

Мы имеем $p(A) = 8$ и $p(B) = 6$. Определите число элементов множества $A \cap B$. Составьте объединение $A \cup B$. Сколько элементов в этом множестве?

Какую связь вы замечаете между числами: $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ и $p(A \cup B)$?

Приведите примеры двух других конечных множеств и покажите, что это же соотношение между $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ и $p(A \cup B)$ сохраняется.

Как доказать, исходя из смысла операций объединения и пересечения, что для любых двух множеств A и B имеет место соотношение $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$?

03. Мы изучаем множества, элементы которых суть числа. Эти множества называются поэтому *числовыми множествами*. Примерами числовых множеств являются: множество натуральных чисел, множество отрицательных чисел, множество целых чисел. Выясним отношения между этими множествами.

Всякое ли натуральное число является целым?

Всякое ли целое число является натуральным?

Какое из двух множеств, натуральных и целых чисел, включается в другое?

Обозначим буквой N множество всех натуральных чисел:

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$$

Три точки «...» означают «и т. д.» и служат в записи для обозначения бесконечности множества (в нашем случае N), так как перечислить все элементы множества, как мы это делали в случае конечных множеств, здесь невозможно.

Три точки (или вообще несколько точек) применяются и для записи конечного множества натуральных или других чисел. Когда чисел много и выписывать их все неудобно, тогда обязательно используют точки и записывают последнее число. Например, множество всех натуральных чисел от 1 до 100 можно записать так: $\{1, 2, 3, ..., 100\}$, в множестве же N всех натуральных чисел последнего числа нет.

---

[1] Изучая бесконечные множества, мы отвлекаемся от невозможности перечисления всех элементов множеств (от незавершимости процесса их образования) и рассуждаем о них так же (по тем же логическим законам), как и о конечных множествах. (В этом сущность одной из основных абстракций математики и логики, абстракции актуальной бесконечности, которую нужно разъяснить учащимся на определенном этапе обучения.)

Обозначим буквой C множество всех целых чисел:

$$C = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Как видно, множество N имеет первое (наименьшее) число (1), но не имеет последнего (наибольшего) числа. Множество C не имеет ни первого, ни последнего числа (в записи множества C мы дважды применили знак «...»).

Обозначениями N и C будем пользоваться в дальнейшем, понимая везде под ними соответственно множество натуральных и множество целых чисел.

Для обозначения отношения включения применим знак «$\subset$».

Запишите с помощью этого знака и букв N и C высказывание «множество натуральных чисел включается в множество целых чисел».

03.1. Важно разъяснить различие между отношениями принадлежности объекта к множеству ($\in$) и включения одного множества в другое ($\subset$), чтобы учащиеся не путали знаки «$\in$» и «$\subset$», похожие по начертанию.

Слева от знака «$\in$» стоит название предмета, справа — название множества, элементом которого является (или не является) этот предмет. Так, например, $1 \in N$, $2 \in N$ — истинные высказывания, так как 1 и 2 действительно принадлежат множеству натуральных чисел; $-3 \in N$, $-5 \in N$ — ложные высказывания, так как -3 и -5 не являются натуральными числами; «$N \in C$» — бессмысленное выражение, так как в нем знак «$\in$» применен неправильно. Он может применяться только к названиям предмета и множества, причем название предмета должно стоять слева от него, а название множества — справа, ибо он обозначает отношение предмета к множеству.[1]

Среди записанных ниже выражений укажите те, которые *а*) обозначают истинное высказывание, *б*) обозначают ложное высказывание, *в*) представляют собой бессмысленное выражение:

$$5 \in N,\ -7 \in N,\ 3 \in C,\ -5 \in C,\ 2 \in 6,\ C \in -7,\ 15 \in C$$

$$C \in N,\ -10 \in N,\ N \in 5,\ -9 \in N,\ -9 \in C,\ 0 \in C,\ -1 \in N.$$

04. Бессмысленным будет также выражение $1 \subset N$, так как в нем неправильно применен знак «$\subset$», который может ставиться только между названиями двух множеств, а не между названиями предмета и множества, выражение же $\{1\} \subset N$ — истинное высказывание.

Мы уже знаем, что высказывание $N \subset C$ истинно. Будет ли также истинным и высказывание $C \subset N$, т. е. включается ли и множество C в множество N?

Так как множество C не включается в множество N, мы это запишем так: «$C \not\subset N$» (перечеркиваем знак включения). Высказывание «$C \not\subset N$» («множество C не включается в множество N») истинно. Оно является отрицанием ложного высказывания $C \subset N$ («множество C включается в множество N»). Отрицание образуется с помощью постановки частицы «не» перед сказуемым.

Образуйте отрицание высказывания $N \subset C$. Запишите его с помощью знака включения. Каким будет это высказывание, истинным или ложным?

Таким образом, если высказывание истинно, его отрицание ложно, если же высказывание ложно, его отрицание истинно.

---

[1] Разумеется, и множество может быть элементом другого множества, но мы такие случаи не рассматриваем.

05. Так как множество N включается в множество C, то чем является множество N для множества C?

Отношение множеств N и C может изображаться с помощью наглядной схемы. Для этого представляем каждое из множеств N и C с помощью множества точек некоторого круга. Круг, изображающий множество N, назовем кругом N, а круг, изображающий множество C, назовем кругом C.

Как должны быть расположены эти круги, чтобы они правильно изобразили отношение между множествами N и C?

Какое множество чисел изображается той частью круга C, которая находится вне круга N?

05.1. В гл. 4 рассматривается вопрос о целесообразности проведения с учащимися I—III классов работы по определению общих и не общих частей геометрических фигур, различным образом расположенных на плоскости.

В результате этой подготовительной работы, учащиеся IV—V классов уже легко найдут часть круга C, находящуюся вне круга N.

06. Пусть N' — множество всех отрицательных чисел.

$N' = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

06.1. Мы не говорим «целых отрицательных» потому, что множество целых чисел — универсальное множество на этом этапе, учащиеся других чисел не знают.

Имеет ли место равенство $N \cup N' = C$, т. е. составляет ли объединение множества натуральных чисел и множества отрицательных чисел множество C всех целых чисел?

Из каких чисел состоит дополнение множества N до множества C?

Так как натуральные числа мы назвали также положительными, то числа, составляющие дополнение множества N до множества C можем назвать неположительными, так как они не принадлежат множеству положительных чисел. Но дополнение множества N до множества C, как мы выяснили, состоит из всех отрицательных чисел и числа 0 и поэтому называется множеством неположительных чисел.

Из каких чисел состоит дополнение множества N' до множества C? Как еще можно назвать множество, состоящее из всех положительных чисел и числа 0?

07. Мы уже знаем, что положительные числа больше нуля, а отрицательные — меньше нуля.

Каким может быть число x, если известно, что оно неположительное?

Мы получили, что «$x < 0$ или $x = 0$». Это записывается кратко так: «$x \leqslant 0$» и читается «x меньше или равно 0», что равносильно «x не положительно».

Каким может быть число x, если оно неотрицательное? Предложение «$x > 0$ или $x = 0$» записывают кратко «$x \geqslant 0$» и читают «x больше или равно 0» или же, что то же, «x не отрицательно».

08. Для обозначения множества чисел x, обладающих некоторым свойством P, применим следующий знак: «$\underset{x}{M}[P]$». Например, $\underset{x}{M}[x > 0]$ обозначает «множество всех чисел (целых), больших нуля, т. е. положительных». Это множество, как известно, есть множество всех натуральных чисел, т. е. $\underset{x}{M}[x > 0] = N$. Аналогично, $\underset{x}{M}[x < 0] = N'$.

Запишите с помощью введенного обозначения множество всех чисел, абсолютная величина которых меньше 2. Перечислите все элементы этого множества.

Как проверить принадлежность какого-нибудь числа к множеству $\underset{x}{M}[|x|<2]$? Надо подставить это число вместо x в предложение «абсолютная величина числа x меньше 2», т. е. в $|x|<2$, если в результате этой подстановки получается истинное высказывание, то данное число принадлежит этому множеству. Если же в результате этой подстановки получается ложное высказывание, то данное число не принадлежит данному множеству. Например, если подставить вместо x число —1, получаем «$|-1|<2$», т. е. истинное высказывание («абсолютная величина числа —1 меньше 2»), если же подставить вместо x число —2, получаем «$|-2|<2$», т. е. ложное высказывание («абсолютная величина числа —2 меньше 2», в действительности же она равна 2).

Перечислите все элементы множества $A=\underset{x}{M}[|x|=2]$, $B=\underset{x}{M}[|x|\leqslant 2]$.

Можно ли перечислить все элементы множества $\underset{x}{M}[|x|>2]$?

Из четырех множеств

$$\underset{x}{M}[|x|<2],\ \underset{x}{M}[|x|\leqslant 2],\ \underset{x}{M}[|x|>2],\ \underset{x}{M}[|x|\geqslant 2]$$

укажите пары дополняющих друг друга множеств и изобразите эти множества с помощью точек на одной прямой.

09. Какое множество чисел является дополнением для множества:

а) $\underset{x}{M}[x>0]$ — положительных чисел,

б) $\underset{x}{M}[x\geqslant 0]$ — неотрицательных чисел,

в) $\underset{x}{M}[x<0]$ — отрицательных чисел,

г) $\underset{x}{M}[x\leqslant 0]$ — неположительных чисел?

Нетрудно заметить, что свойства, характеризующие два дополняющих друг друга множества, отрицают одно другое. Например, свойство, характеризующее множество положительных чисел, выражается предложением «число x больше 0» («$x>0$»), а свойство, характеризующее дополнение этого множества, выражается предложением «число x меньше или равно 0», что равносильно предложению «число x не больше 0», т. е. отрицанию первого предложения.

Почему мы говорим здесь, что предложение «число x меньше или равно 0» ($x\leqslant 0$) равносильно предложению «число x не больше 0» ($x \not> 0$)?

Для всякого числа x имеет место один и только один из случаев: $x>0$, или $x=0$, или $x<0$. Если $x=0$ или $x<0$, то $x\not>0$, и обратно, если $x\not>0$, то $x=0$ или $x<0$, т. е. $x\leqslant 0$.

Если взять какое-нибудь положительное число, например число 3, то оно обращает первое предложение ($x>0$) в истинное высказывание ($3>0$), а второе ($x\leqslant 0$) — в ложное высказывание ($3\leqslant 0$). Если же взять какое-нибудь число из дополнения множества положительных чисел, т. е. неположительное, например —3, то оно обращает первое предложение в ложное высказывание ($-3>0$), а второе, его отрицание, в истинное высказывание. ($-3\leqslant 0$ — истинное высказывание, потому что $-3<0$ — истинное высказывание, а сложное высказывание «$-3<0$ или $-3=0$», образованное с помощью союза «или» понимается как истинное, если истинно хотя бы одно из высказываний, соединенных этим союзом. В данном случае истинно первое из этих высказываний: $-3<0$. Высказывание $3\leqslant 0$, т. е. $3<0$ или $3=0$, ложно потому, что ложны оба высказывания $3<0$ и $3=0$, соединенные союзом «или».)

10. Пусть даны два множества:

$$A = \underset{x}{M}[x < 0] \text{ и } B = \underset{x}{M}[x > -5].$$

Из каких чисел состоит объединение этих множеств $A \cup B$? Как доказать, что любое целое число принадлежит множеству $A \cup B$? Если взять, например, число —8, то оно принадлежит этому множеству, так как принадлежит множеству A ($-8 < 0$ — истинное высказывание); число 30 принадлежит этому множеству, так как оно принадлежит множеству B ($30 > -5$ — истинное высказывание); число —3 принадлежит этому множеству, так как принадлежит и множеству A и множеству B ($-3 < 0$ и $-3 > -5$ — оба истинные высказывания).

Если взять теперь любое число x, каким оно может быть относительно числа 0? Если оно отрицательно, то оно принадлежит множеству A, а значит и множеству $A \cup B$. Если же оно неотрицательно, то каким оно будет относительно числа —5? В этом случае какому множеству принадлежит число x?

К какому выводу мы пришли?

Как выразить свойство, характеризующее множество $A \cup B$ через свойства, характеризующие множества A и B?

Мы получаем $A \cup B = \underset{x}{M}[x < 0$ **или** $x > -5]$.

В этой записи союз «или» имеет такой смысл: предложение «$x < 0$ или $x > -5$» представляет собой истинное высказывание, когда хотя бы одно из предложений «$x < 0$», «$x > -5$», соединенных союзом «или», представляет собой истинное высказывание.

11. Возьмем те же множества A и B, что и в упражнении 10. Из каких чисел состоит пересечение $A \cap B$ этих множеств? Можно ли перечислить все элементы множества $A \cap B$? Чем отличается в этом отношении множество $A \cap B$ от множества $A \cup B$?

Как выразить свойство, характеризующее множество $A \cap B$, через свойства, характеризующие множества A и B?

Мы получаем $A \cap B = \underset{x}{M}[x < 0$ **и** $x > -5]$.

Союз «и», соединяющий два предложения, имеет следующий смысл: сложное предложение «$x < 0$ **и** $x > -5$», образованное с помощью этого союза, представляет собой истинное высказывание тогда и только тогда, когда оба предложения «$x < 0$», «$x > -5$», соединенные этим союзом, представляют собой истинные высказывания.

Каждое из чисел —1, —2, —3, —4 принадлежит множеству $A \cap B$, так как обращает предложение «$x < 0$ и $x > -5$» в истинное высказывание. Любое другое число не принадлежит этому множеству. Например, число 0 не принадлежит этому множеству, ибо высказывание «$0 < 0$ и $0 > -5$» ложно, так как ложно высказывание «$0 < 0$»; число —6 не принадлежит этому множеству — высказывание «$-6 < 0$ и $-6 > -5$» ложно, так как ложно высказывание «$-6 > -5$».

12. В виде объединения или пересечения каких множеств можно представить множество: *а*) $\underset{x}{M}[x > 0$ **и** $x < 5]$; *б*) $\underset{x}{M}[x > 0$ **или** $x < 5]$?

Какое из данных множеств конечно?

13. Пусть имеем $\underset{x}{M}[x > -3$ **и** $x < 3]$. Из каких чисел состоит это множество?

Составьте всевозможные пары элементов этого множества (имеются в виду у п о р я д о ч е н н ы е пары, т. е. различными будут считаться не только пары вида (—2; 0), (—2; —1), (—1; 2), отличающиеся хотя бы одним элементом, но и такие пары, как (—2; 0) и (0; —2), которые отличаются только порядком элементов). Сколько всего пар получилось?

Найдем все эти пары геометрическим путем, с помощью решетки, которую мы уже умеем строить. (Раньше мы строили решетки для конечных множеств натуральных чисел и присваивали каждому узлу решетки название в виде двузначного числа, теперь мы построим решетку для конечного множества целых чисел: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и каждому узлу решетки присвоим название в виде упорядоченной пары чисел из этого множества по тому же правилу, по которому мы записывали двузначные числа с помощью цифр из данного множества.)

II. Универсальное множество — множество R рациональных чисел

14. Всякое ли целое число является рациональным? Всякое ли рациональное число является целым? Какое из двух множеств C и R включается в другое, является подмножеством другого?

Таким образом, отношение между множествами C и R можно записать следующим образом: «$C \subset R$ и $R \not\subset C$».

Изобразите это отношение с помощью кругов. Дополните эту схему кругом N, изображающим множество натуральных чисел. Какое множество чисел изображается частью круга R, расположенной вне круга C?

Множество несократимых дробей $\frac{m}{n}$, где $n \neq 1$ (т. е. не являющихся целыми числами), обозначим $-D_p$.

Что представляет собой множество $C \cup D_p$?

Из каких чисел состоит дополнение множества C до множества R?
Из каких чисел состоит дополнение множества N до множества R?

15. Всякое ли целое число — положительное? Всякое ли положительное число — целое? Изобразите отношение между множествами целых и положительных чисел с помощью кругов C и P, где P — круг, изображающий множество положительных чисел.

Что представляет собой пересечение этих множеств: $C \cap P$ или $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x \in P]$ или же $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x > 0]$?

Какое множество чисел изображается частью круга P, расположенной вне круга C; частью круга C, расположенной вне круга P; общей частью этих кругов?

16. Изобразите отношение между множествами целых и отрицательных чисел с помощью кругов C и O, где O — круг, изображающий множество отрицательных чисел.

Что представляет собой по отношению к этим множествам множество $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x < 0]$? Какая область на схеме изображает это множество?

Какое множество чисел изображается частью круга O, расположенной вне круга C? частью круга C, расположенной вне круга O?

17. Пусть $A = \underset{x}{M}[|x| < 2]$, т. е. A — множество всех (рациональных) чисел, абсолютная величина которых меньше 2. Какое из следующих высказываний истинно:

$$0 \in A,\ -1 \in A,\ 2 \in A,\ 1 \in A,\ \frac{3}{4} \in A,\ \frac{5}{2} \in A?$$

В каком отношении находится множество A и множество $B = \underset{x}{M}[|x| \leqslant 2]$?

Перечислите все элементы дополнения множества A до множества B.

18. В каком отношении находятся множества:

а) $\underset{x}{M}[x \in N$ и $x < 5]$ и $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x < 5]$;

б) $\underset{x}{M}[x \in N$ и $x > 5]$ и $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x > 5]$;

в) $\underset{x}{M}[x \in C$ и $x > 5]$ и $\underset{x}{M}[x > 5]$;

г) $\underset{x}{M}\,[x \in C$ и $|x| < 2]$ и $\underset{x}{M}\,[|x| < 2]$;

д) $\underset{x}{M}\,[x \in C$ и $|x| = 2]$ и $\underset{x}{M}\,[|x| = 2]$?

19. Выясните отношение между каждыми двумя из трех множеств:

$$A = \underset{x}{M}[x \in C \text{ и } x < 5],\ B = \underset{x}{M}[x \in N \text{ и } x < 5] \text{ и } E = \underset{x}{M}[x < 5].$$

Изобразите эти числовые множества с помощью точек прямой.

20. В каком отношении находятся множества

$$\underset{x}{M}[|x| < 2] \text{ и } \underset{x}{M}[|x| < 1]?$$

Найдите объединение и пересечение этих множеств. Изобразите эти множества с помощью точек прямой.

21. Мы уже знаем, что решетки, которые раньше строили для некоторых конечных множеств натуральных или целых чисел, получены в результате применения метода координат, а именно:

горизонтальная ось — ось абсцисс,

вертикальная ось — ось ординат,

упорядоченная пара чисел, соответствующая узлу решетки,— абсцисса и ордината (координаты точки или узла).

Подобные решетки назовем координатными.

Множеству N всех натуральных чисел соответствует бесконечная координатная решетка, расположенная в первом координатном углу, узлы которой суть точки с натуральными координатами.

Что представляет собой координатная решетка, соответствующая множеству C?

Изобразите конечный участок этой решетки (например, для множества чисел $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$).

Отметьте на этом участке решетки узлы:

а) координаты которых равны между собой или, что то же, найдите $\underset{x,y}{M}[x \in A$ и $y \in A$ и $x = y]$, т. е. «множество всех пар чисел (x, y) из A, таких, что $x = y$»;

б) абсцисса которых меньше ординаты $\underset{(x,y)}{M}[x \in A$ и $y \in A$ и $x < y]$;

в) абсцисса которых больше ординаты $\underset{(x,y)}{M}[x \in A$ и $y \in A$ и $x > y]$.

Как выглядит координатная решетка, соответствующая множеству R? Можно ли изобразить все узлы конечного участка этой решетки? Вследствие какого свойства множества R это практически неосуществимо?

III. Универсальное множество — множество D вещественных чисел

22. Всякое ли рациональное число — вещественное? Всякое ли вещественное число — рациональное? Какое из двух множеств R и D является подмножеством другого? Как записать отношение между этими двумя множествами

$$(R \subset D \text{ и } D \not\subseteq R)?$$

Изобразите это отношение с помощью кругов. Дополняйте эту схему кругами C и N.

Какое множество чисел изображается частью круга D, расположенной вне круга R?

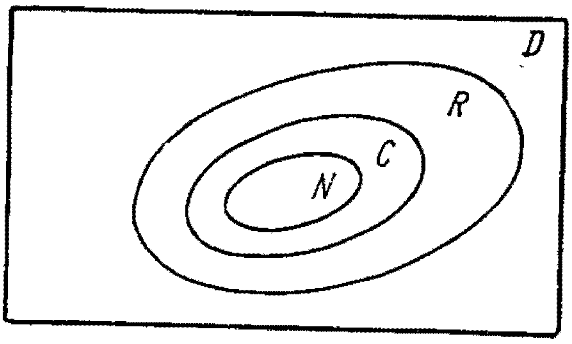
Обозначим множество иррациональных чисел буквой I. Что представляет собой множество $R \cup I$?

Что представляет собой дополнение множества R до множества D, множества C до множества D, множества I до множества D, множества N до множества D?

23. Изобразите с помощью кругов отношения между множествами:
а) целых, рациональных, положительных и вещественных чисел,
б) натуральных, отрицательных, рациональных и вещественных чисел.

Иногда удобно изобразить эти отношения, представляя множества не с помощью кругов, а с помощью множеств точек произвольных замкнутых фигур, расположенных внутри некоторого прямоугольника, множество точек которого изображает наиболее «широкое» множество объектов, изучаемое нами и называемое у н и в е р с а л ь н ы м множеством.

Выясним, в каком смысле мы здесь применяем слово «широкое». Множество вещественных чисел является наиболее широким множеством чисел, которое мы знаем, в том смысле, что все другие известные нам числовые множества являются его подмножествами. Так как множество вещественных чисел содержит все числа (которые мы знаем), оно является для нас универсальным числовым множеством. (До того, как ввели иррациональные числа, универсальным числовым множеством было множество рациональных чисел, до введения дробей — множество целых чисел, а до введения отрицательных чисел — множество натуральных чисел.)



Р и с. 5.

Схему отношений между множествами N, C, R, D можно изобразить так, как показано на рис. 5.

Отделите на этой схеме область, изображающую множество положительных чисел (P).

Укажите на схеме, какая область изображает:
а) множество целых отрицательных чисел;
б) множество положительных иррациональных чисел;
в) множество рациональных отрицательных чисел.

Когда мы говорим «целые отрицательные числа», имеем в виду множество всех чисел, которые являются одновременно целыми и отрицательными, т. е. $\underset{x}{M}\,[x \in C \text{ и } x < 0]$, множество положительных иррациональных чисел — $\underset{x}{M}\,[x > 0 \text{ и } x \in I]$, множество рациональных отрицательных чисел — $\underset{x}{M}\,[x \in R \text{ и } x < 0]$.

24. В каком отношении находятся следующие множества:

$$A_1 = \underset{x}{M}\,[x \in N \text{ и } |x| < 3];$$

$$A_2 = \underset{x}{M}\,[x \in C \text{ и } |x| < 3];$$

$$A_3 = \underset{x}{M}\,[x \in R \text{ и } |x| < 3];$$

$$A_4 = \underset{x}{M}\,[x < 3]. \text{ (Здесь, разумеется, и } x \in D.)$$

Изобразите эти множества с помощью точек прямой.
Какие из этих множеств конечны, какие бесконечны?

25. Мы рассматриваем конечные и бесконечные множества. Множества N, C, R, D — бесконечные. Множество делителей данного числа — конечное. В предыдущем примере A_1 и A_2 — конечные множества, A_3 и A_4 — бесконечные.

Конечное множество может содержать большое или небольшое число элементов. Например, A_1 содержит лишь два элемента: 1 и 2. Если из множества, содержащего два элемента, удалить один элемент, то оставшийся элемент уже не составляет множество в обычном смысле этого слова. Тем более, если нет ни одного элемента, мы считаем обычно, что нет никакого множества.

Покажем сейчас, что некоторое расширение нашего понятия множества весьма удобно.

Возьмем два множества: $A = \underset{x}{M}[x \in C$ **и** $x > 2] = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ и $B = \underset{x}{M}[x \in C$ **и** $x \leqslant 3] = \{3, 2, 1, 0, -1, \ldots\}$.

Найдем их пересечение $A \cap B = \{3\}$. В результате этой операции получилось одно число (3); но мы знаем, что пересечение двух множеств есть множество. Этот пример показывает нам целесообразность расширения понятия «множество», включая в него и множество, состоящее из одного элемента, которое мы назовем единичным множеством.

Возьмем другой пример. Пусть $A = \underset{x}{M}[x \in C$ **и** $x > 2]$ и $B = \underset{x}{M}[x \in C$ **и** $x < 2]$.

Найдите пересечение этих множеств. $A \cap B$ не содержит ни одного элемента. Но $A \cap B$ по определению есть множество и, как видно, мы заранее не можем знать, бесконечное ли это множество или конечное, а если оно конечное, то сколько содержит элементов и вообще содержит ли оно элементы.

Поэтому встречаются случаи, когда нам приходится рассматривать и множество, не содержащее ни одного элемента, которое называют пустым и обозначают знаком «$\varnothing$».

Если два множества не имеют ни одного общего элемента, то их пересечение есть пустое множество и они называются непересекающимися. Так, например, отношение между множествами R и I может быть записано следующим образом: «$R \cup I = D$ и $R \cap I = \varnothing$».

Укажите еще пары числовых множеств, находящихся в аналогичном отношении. Если же пересечение двух множеств не пусто, т. е. эти множества имеют общие элементы, то они называются пересекающимися.

Найдите пересечения следующих множеств:

а) $\underset{x}{M}[x > 0]$ и $\underset{x}{M}[x \leqslant 0]$,

б) $\underset{x}{M}[x > 0]$ и $\underset{x}{M}[x < 0]$. Какие из этих пар множеств пересекающиеся, а какие непересекающиеся?

26. Изображая множество рациональных чисел с помощью точек прямой, каждому рациональному числу сопоставляем точку прямой. Эти точки называем рациональными.

В каком отношении находится множество рациональных точек прямой с множеством всех точек прямой?

Мы уже знаем, что координатная решетка, соответствующая множеству R, очень густа, т. е. узлы этой решетки (точки плоскости с рациональными координатами) очень близки друг другу. Имеет ли смысл говорить здесь еще о «решетке»? Не является ли каждая точка плоскости ее узлом?

Образует ли множество точек плоскости с вещественными координатами «решетку» или же покрывает полностью плоскость?

27. Так как при заданной системе координат каждой упорядоченной паре вещественных чисел (x, y) соответствует определенная и единственная точка плоскости (с абсциссой x и ординатой y) и, обратно, каждой точке плоскости соответствует определенная и единственная упорядоченная пара вещественных чисел, мы можем, учитывая это соответствие, называть пару вещественных чисел (x, y) — точкой (x, y) плоскости, а множество пар вещественных чисел, удовлетворяющих некоторому отношению $K(\underset{(x,y)}{M}[xKy])$,— множеством точек плоскости, удовлетворяющих этому отношению.

Например, $\underset{(x,y)}{M}[x = y]$ — множество точек плоскости с равными координатами. Изобразите это множество точек. Можем ли мы изобразить все это множество? График какой функции мы получим?

Изобразите множества точек: $\underset{(x,y)}{M}[x = -y]$, $\underset{(x,y)}{M}[x = 2y]$, $\underset{(x,y)}{M}[x = -2y]$.

Что представляют собой множества точек:

$$\underset{(x,y)}{M}[x < y], \ \underset{(x,y)}{M}[x \leqslant y], \ \underset{(м,y)}{M}[x > y], \ \underset{(x,y)}{M}[x \geqslant y]?$$

28. Сравните следующие множества точек плоскости:

а) $\underset{(x,y)}{M}[x < y]$;

б) $\underset{(x,y)}{M}[x \in R$ и $y \in R$ и $x < y]$;

в) $\underset{(x,y)}{M}[x \in C$ и $y \in C$ и $x < y]$.

В каком отношении находятся каждые два из этих трех множеств?

29. Что представляет собой следующее множество точек плоскости:

а) $\underset{(x,y)}{M}[x < 1$ и $y < 1]$;

б) $\underset{(x,y)}{M}[x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1]$;

в) $\underset{(x,y)}{M}[x > 1$ и $y > 1]$;

г) $\underset{(x,y)}{M}[x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1]$?

30. Найдите пересечение следующих множеств точек плоскости:

а) $\underset{(x,y)}{M}[y = x^2]$ и $\underset{(x,y)}{M}[y = 1]$;

б) $\underset{(x,y)}{M}[x^2 + y^2 = 1]$ и $\underset{(x,y)}{M}[y = x]$.

Перечень упражнений (1—30) не является, разумеется, исчерпывающим, но он содержит наиболее важные типы упражнений теоретико-множественного характера, которые необходимо решать на материале учения о числе.

Глава 4. Применение и дальнейшее расширение теоретико-множественных понятий в курсе геометрии

Параллельно с формированием и применением теоретико-множественных понятий в учении о числе необходимо использовать имеющиеся в курсе геометрии широкие возможности применения и дальнейшего расширения этих понятий.

Мы рассмотрим три основных направления развития теоретико-множественных идей в курсе геометрии.

Первое направление связано с трактовкой геометрической фигуры как множества точек, второе — с понятием геометрического преобразования, третье — с разъяснением отношений между различными множествами (классами) геометрических фигур и их применением к анализу силлогистических умозаключений, из которых строятся доказательства геометрических теорем.

§ 1. Применение одной и той же теоретико-множественной концепции как в учении о числе, так и в геометрии сближает эти области и устраняет изоляцию геометрии в школьном обучении: над числовыми множествами и над множествами точек (геометрическими фигурами) выполняем одни и те же операции. Исходя из небольшого числа геометрических фигур, рассматриваемых как множества точек, путем объединения и пересечения этих множеств получаем большое разнообразие новых геометрических фигур. Работа с геометрическими фигурами, как со множествами точек, явно недооценивается установившейся методикой преподавания. Эта работа полностью отсутствует в начальных классах, где она особенно нужна для подготовки учащихся к изучению систематического курса геометрии. К этому вопросу мы еще возвратимся во второй части в связи с рассмотрением вопроса о различных уровнях в обучении геометрии.

Здесь приведем лишь несколько типов упражнений, которые целесообразно решать с учащимися начальных классов, при этом предполагаем, что они распознают по форме круг, треугольник, квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, знают, что значит точка лежит «внутри» и «вне» фигуры. (Интересный эксперимент по первоначальному ознакомлению учащихся I—III классов с этими и другими геометрическими понятиями проводится уже в течение нескольких лет А. М. Пышкало.)

01. Начертите квадрат. Начертите внутри его еще один (меньший) квадрат.

Отметьте какую-нибудь точку внутри меньшего квадрата. Как она лежит относительно большего квадрата (внутри или вне его)?

Отметьте какую-нибудь точку вне большего квадрата. Как она расположена относительно меньшего квадрата?

Нельзя ли найти такую точку, которая лежала бы внутри меньшего квадрата, но вне большего?

Нельзя ли найти такую точку, которая лежала бы внутри большего квадрата, но вне меньшего?

Отметьте такую точку.

02. Начертите два каких-нибудь квадрата, один полностью вне другого.

Отметьте точку, лежащую внутри первого (один из квадратов назовем первым, а другой — вторым) и вне второго, отметьте точку, лежащую внутри второго квадрата. Как она расположена относительно первого?

Существует ли точка, лежащая внутри обоих квадратов?

03. Начертите два квадрата так, чтобы были точки, лежащие внутри обоих квадратов, точки, лежащие внутри первого, но вне второго, и точки, лежащие внутри второго, но вне первого.

Закрасьте часть первого квадрата, лежащую вне второго в красный, часть второго квадрата, лежащую вне первого,— в синий и общую часть двух квадратов — в желтый цвет.

04. Начертите два одинаковых круга радиусами в 6 *см* так, чтобы расстояние между их центрами равнялось 9 *см*.

Обозначьте один круг буквой *А*, а другой — буквой *Б*.

Как расположены эти круги?

Отметьте точку:

а) лежащую внутри круга *А* и внутри круга *Б*;

б) лежащую внутри круга *А*, но вне круга *Б*;

в) лежащую внутри круга *Б* и вне круга *А*;

г) лежащую вне круга *А* и вне круга *Б*.

04.1. После решения упражнений, приведенных во второй главе, в частности тех, в которых учащиеся знакомятся с понятиями дополнения множества, объединения и пересечения множеств, можем решать и на геометрическом материале упражнения, закрепляющие представления учащихся в этой области.

05. В результате какой операции над множествами точек кругов *А* и *Б* получается множество точек общей части этих кругов? (Имеются в виду круги *А* и *Б* из упражнения **04**.)

Что представляет собой объединение $А \cup Б$?

Раскрасьте: в красный цвет множество $А \cap Б$, в синий — дополнение множества $А \cap Б$ до множества *А*, в желтый — дополнение множества $А \cap Б$ до множества *Б*.

06. Начертите два круга *А* и *Б* так, чтобы все точки круга *А* лежали внутри круга *Б*, но не все точки круга *Б* лежали внутри круга *А*.

Какое из двух множеств точек *А* и *Б* включается в другое? Укажите дополнение множества *А* до множества *Б*. Что представляет собой в этом случае пересечение $А \cap Б$, объединение $А \cup Б$?

07. Начертите два круга *А* и *Б* так, чтобы часть круга *А* лежала внутри круга *Б*, а часть вне его. Что представляет собой в этом случае пересечение $А \cap Б$? Что представляет собой объединение $А \cup Б$?

Начертите прямоугольник так, чтобы оба круга оказались внутри его. Укажите:

а) дополнение множества *А* до множества точек прямоугольника;

б) дополнение множества *Б* до множества точек прямоугольника;

в) дополнение множества $А \cap Б$ до множества точек прямоугольника;

г) дополнение множества $А \cup Б$ до множества точек прямоугольника.

(Надо сделать четыре чертежа прямоугольника и внутри его двух пересекающихся кругов и на каждом чертеже закрасить требуемые дополнения.)

08. Допустим, что какой-то круг *А* лежит полностью внутри другого круга *Б*, а круг *Б* полностью лежит внутри третьего круга *В*. Что можно сказать о расположении кругов *А* и *В*?

Начертите три круга *А*, *Б* и *В* так, чтобы круг *А* лежал внутри круга *Б*, а круг *Б* — внутри круга *В*.

Укажите дополнение множества *Б* до множества *В*, множества *А* до множества *Б*, до множества *В*.

09. Допустим, что круг A лежит полностью внутри круга $Б$, а круг $Б$ лежит полностью вне круга $В$. Что можно сказать, не глядя на эти круги, о расположении кругов A и $В$?

Начертите три круга A, $Б$ и $В$ так, чтобы круг A лежал внутри круга $Б$, а круг $Б$ — вне круга $В$.

10. Начертите три круга A, $Б$ и $В$ так, чтобы у них была общая часть и у каждого круга была часть, лежащая вне других кругов. (Можно посоветовать учащимся начертить равные круги радиусом, например, в 4 *см*, а их центры расположить в вершинах равностороннего треугольника стороной в 6 *см*.)

Заготовьте 4 таких чертежа.

Укажите множества $A\cap Б$, $Б\cap В$, $A\cap В$. Что можете сказать о множествах $A\cap Б$ и $Б\cap A$? $Б\cap В$ и $В\cap Б$? $A\cap В$ и $В\cap A$?

Найдите множество $A\cap Б$, а затем пересечение этого множества с множеством $В$, т. е. множество $(A\cap Б)\cap В$. Закрасьте это множество на одном из ваших чертежей в красный цвет.

Найдите множество $Б\cap В$, а затем пересечение множества A с этим множеством, т. е. множество $A\cap(Б\cap В)$. Раскрасьте (на втором чертеже) это множество в синий цвет.

Сравните закрашенные множества.

Мы получили: $(A\cap Б)\cap В = A\cap(Б\cap В)$.

Укажите объединение множеств A и $Б$, т. е. множество $A\cup Б$, а затем объединение этого множества с множеством $В$, т. е. множество $(A\cup Б)\cup В$. Закрасьте это множество (на третьем чертеже) в красный цвет.

Укажите объединение множеств $Б$ и $В$, т. е. множество $Б\cup В$, а затем объединение множества A с этим множеством, т. е. множество $A\cup(Б\cup В)$. Закрасьте (на четвертом чертеже) это множество в желтый цвет.

Сравните закрашенные множества.

Мы получили $(A\cup Б)\cup В = A\cup(Б\cup В)$.

10.1. С помощью двух пересекающихся кругов легко выясняется коммутативность операций над множествами, с помощью трех попарно пересекающихся кругов — ассоциативность этих операций. Очевидно, эти упражнения целесообразно решать, когда учащиеся уже знакомы с одноименными свойствами арифметических операций. В таком случае учащиеся без труда обнаруживают сходство в свойствах операций над множествами и над числами.

В дальнейшем с помощью трех попарно пересекающихся кругов можно иллюстрировать и два дистрибутивных свойства операций над множествами, показывая при этом, что обычные операции сложения и умножения чисел обладают лишь одним дистрибутивным свойством (умножения относительно сложения).

11. Заготовьте четыре одинаковых чертежа, на каждом из которых начертите три равных круга радиусами в 4 *см* с центрами, расположенными друг от друга на расстоянии в 6 *см*. Обозначим эти круги буквами A, $Б$ и $В$ соответственно.

На одном чертеже закрасьте множество $A\cap(Б\cup В)$, т. е. пересечение множества A с объединением множеств $Б$ и $В$, на другом — множество $(A\cap Б)\cup(A\cap В)$, т. е. объединение пересечений множеств A и $Б$ и множеств A и $В$.

Сравните закрашенные множества.

Мы получили $A\cap(Б\cup В) = (A\cap Б)\cup(A\cap В)$.

Закрасьте (иа третьем чертеже) миожество $A \cup (Б \cap В)$, т. е. объединеине множества $А$ с пересечеинем миожеств $Б$ н $В$, а иа другом (четвертом) чертеже закрасьте миожество $(A \cup Б) \cap (A \cup В)$, т. е. пересечеиие объеднеиий миожеств $А$ и $Б$ и миожеств $А$ н $В$. Сравинте закрашеииые миожества.

Мы получилн $A \cup (Б \cap В) = (A \cup Б) \cap (A \cup В)$.

§ 2. Изучая геометрические фигуры на плоскости, мы должны их рассматривать как множества точек, представляющие собой подмножества универсального множества — множества точек плоскости.

Термин «плоскость» (как и термин «прямая») применяется для обозначения определенного множества точек, а также и для обозначения носителя этого множества. В проективной геометрии обозначают эти понятия различными терминами: множество точек плоскости называют плоским полем, а термин «плоскость» применяется для обозначения носителя этого множества. (Аналогично множество точек прямой называют прямолинейным рядом точек, а термин «прямая» обозначает лишь носителя этого ряда.) Такое различение удобно в связи с рассмотрением геометрических преобразований на плоскости, когда устанавливается соответствие между двумя плоскими полями с общим носителем (или в связи с рассмотрением преобразований на прямой, когда устанавливается соответствие между двумя рядами точек с общим носителем).

В школьной практике нет специальных терминов для обозначения множества точек плоскости и множества точек прямой и поэтому часто термины «плоскость» и «прямая» применяются в процессе обучения для обозначения соответствующих множеств точек. Однако в традиционной практике это делается в неявном виде, мы предлагаем это подчеркивать в процессе обучения.

Приведем несколько примеров.

1. При аксиоматическом построении геометрии обычно исходят из трех категорий геометрических элементов (основных объектов): точек, прямых и плоскостей.[1]

Как видно, точки, прямые и плоскости задаются как самостоятельные первоначальные объекты геометрии. Они могут находиться (или не находиться) в отношении «принадлежности», описанном соответствующей группой аксиом.[2]

С помощью аксиом принадлежности и порядка устанавливается, что каждая прямая (плоскость) находится в отношении принадлежности с бесконечным множеством точек. Каждая из этих точек называется точкой прямой (плоскости), и это надо понимать в том смысле, что эта точка при-

[1] Д. Гнльберт. Осиоваиня геометрнн. М., 1948, стр. 56.
[2] Там же, стр. 63.

надлежит (в теоретико-множественном смысле) множеству точек, находящихся в отношении принадлежности (в геометрическом смысле) с этой прямой (плоскостью).

Из дальнейшего применения, которое получают термины «точка», «прямая» и «плоскость» при развертывании геометрической теории, следует, что «точка» — название для простейших элементов, из которых геометрия строит свои образы, а «прямая» и «плоскость» — названия для множеств точек, свойства которых описываются аксиомами и логическими следствиями из них (теоремами). Из этих соображений исходят, когда для обозначения геометрического отношения принадлежности применяют знак отношения включения и пишут, например, «$a \subset \alpha$» для выражения предложения «прямая a принадлежит плоскости α». Эту же запись вполне естественно интерпретировать и как выражение следующего факта: «множество точек прямой a включается в множество точек плоскости α (или является подмножеством этого множества)».

Однако, исходя из тех же теоретико-множественных соображений, принадлежность точки к прямой или плоскости следовало бы уже обозначать не знаком включения, как это обычно делают, а знаком отношения принадлежности объекта к множеству, т. е. писать $A \in a$, $A \in \alpha$, вместо $A \subset a$, $A \subset \alpha$, чтобы не дезориентировать учащихся, знакомых с отношениями включения одного множества в другое и принадлежности объекта к множеству. (Можно, разумеется, применять и специальный знак для обозначения геометрического отношения принадлежности, но вряд ли целесообразно это делать в школе, когда мы стремимся раскрыть теоретико-множественный смысл этого отношения.)

2. Когда мы говорим «точка делит прямую на две полупрямые» или «прямая делит плоскость на две полуплоскости», точный смысл этих высказываний явно не выражен, хотя они интуитивно ясны и не вызывают затруднений. Для достижения подлинного понимания сущности свойств, выраженных этими высказываниями, необходимо, однако, раскрыть их точный смысл. Мы предлагаем не строгое обоснование в школьном курсе этих свойств, а их разъяснение на теоретико-множественной базе. Например, «прямая делит плоскость на две полуплоскости» означает «прямая разбивает множество точек плоскости на два подмножества».

Здесь возникает важный вопрос, что означает «разбиение множества на подмножества»?

Допустим, множество точек α разбито на два подмножества α_1 и α_2. Под этим надо понимать, что *а*) всякая точка A множества α принадлежит α_1 или α_2 и обратно, т. е. $A \in \alpha$, если и только если $A \in \alpha_1$ **или** $A \in \alpha_2$, или $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$;

б) каждое из подмножеств α_1 и α_2 содержит точки (т. е. не является пустым), иначе, если, например, $\alpha_2 = \varnothing$, то $\alpha = \alpha_1$ и не имеет место никакое разбиение;

в) не существует точки множества α, которая принадлежала бы и α_1 и α_2, т. е. не существует точки $A (A \in \alpha)$ такой, что $A \in \alpha_1$ **и** $A \in \alpha_2$, иначе говоря $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing$.

Таким образом, три условия, определяющие разбиение множества α на два подмножества α_1 и α_2, могут быть кратко выражены следующим образом: *а*) $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$; *б*) $\alpha_1 \neq \varnothing$ и $\alpha_2 \neq \varnothing$; *в*) $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing$.

Разбиение множества на два подмножества осуществляется с помощью некоторого свойства, которое имеется у одних элементов этого множества и не имеется у других, или с помощью отношения, которому одни пары элементов данного множества удовлетворяют, другие не удовлетворяют.

В нашем случае разбиение осуществляется с помощью следующего отношения между парами точек плоскости: отрезок, соединяющий две точки плоскости, не принадлежащие прямой *a*, может содержать или не содержать точку этой прямой. В первом случае две точки считаются принадлежащими различным подмножествам, во втором — одному и тому же подмножеству.

Идея разбиения множества на подмножества находит широкое применение, в частности при определении и классификации геометрических понятий. Эту идею можно разъяснить в таком аспекте, как это сделано выше, учащимся IX класса, уже знакомым (по предлагаемой нами системе) с необходимыми теоретико-множественными понятиями. Однако и в начале курса геометрии необходимо разъяснять учащимся смысл высказывания «прямая делит плоскость на две полуплоскости». На этом этапе (IV—V класс), основываясь на конкретном восприятии разделения плоскости прямой линией на две полуплоскости, легко показать учащимся, каким геометрическим свойством характеризуется это деление. Предлагая учащимся взять две произвольные точки «по одну сторону» от прямой и по «разные стороны от прямой», мы помогаем им обнаружить это свойство.

3. В старших классах понятие угла может быть уточнено следующим образом: имеем две прямые *a* и *b*, пересекающиеся в точке $O (a \cap b = O)$; точка O определяет на прямой *a* два луча a_1 и a_2, на прямой *b* — два луча b_1 и b_2. Прямая *a* определяет на плоскости две полуплоскости α_1 и $\overline{\alpha}_1$, прямая b — соответственно α_2 и $\overline{\alpha}_2$.

Прямые a и b разбивают множество точек плоскости на четыре области (подмножества). Каждое из этих подмножеств точек плоскости (пересечение двух полуплоскостей) вместе с ограничивающими их лучами называется углом.

(Можно рассмотреть и случай двух параллельных прямых, определяющих на плоскости три области: две полуплоскости и полосу.)

4. Многоугольник обычно определяют как фигуру или часть плоскости, ограниченную замкнутой ломаной линией.[1]

Целесообразно ввести выражение «подмножество точек плоскости» как синоним выражений «часть плоскости» и «фигура». Для учащихся, знакомых с элементами теории множеств, это выражение имеет точно определенный смысл и поэтому лучше содействует правильному пониманию определения.

В связи с формированием понятия многоугольника в качестве подготовки целесообразно рассмотреть вопрос о разбиении замкнутой ломаной линией множества точек плоскости на два подмножества. Это разбиение осуществляется следующим отношением: отрезок, соединяющий две точки плоскости, не принадлежащие ломаной, может содержать нечетное или четное (в том числе и 0) число точек ломаной. В первом случае эти две точки считаются принадлежащими различным подмножествам, во втором — одному и тому же подмножеству. Следует отметить, что здесь мы имеем обобщение случая разбиения множества точек плоскости прямой линией на два подмножества (п. 2).

Одну из двух областей, определяемых замкнутой ломаной линией, называем в н у т р е н н е й, другую — в н е ш н е й.

Интуитивно совершенно ясно, какая из областей считается внутренней, какая внешней. Но эта «интуитивная ясность», порожденная наблюдениями и опытом, еще не позволяет учащимся сформулировать на языке геометрии характеристическое свойство (признак), отличающее внутреннюю область от внешней.

Поиск таких свойств, характеризующих интуитивно ясные, но не сформулированные еще положения,— важное упражнение, помогающее уточнить и точно сформулировать то, что получено опытным путем или обнаружено в результате наблюдений.

В нашем случае мы находим такое характеристическое свойство: расстояние между любыми двумя точками в одной области ограничено, в другой — неограничено (может быть сколь угодно большим — множество расстояний не имеет

---

[1] Н. Н. Н и к и т и н. Геометрия. Учебник для VI—VIII классов. М., 1961, стр. 42.

верхней грани). Первую область и называют внутренней, а вместе с ограничивающей ее ломаной линией — многоугольником.

Наше рассуждение естественно приводит нас к важному понятию диаметра многоугольника и вообще фигуры как наибольшего из отрезков, соединяющих произвольные две точки фигуры, которое в школе не рассматривается. Введение этого понятия в школьном преподавании представляется целесообразным и не встретит никаких трудностей.

5. Отрезок прямой, многоугольник, многогранник — множества точек. На различных этапах обучения мы изучаем понятия длины отрезка, площади многоугольника, объема многогранника. Все эти понятия — конкретные модели общего, абстрактного понятия меры множества.

Поэтому целесообразно сопоставить эти понятия для выявления общих свойств, характеризующих общее понятие меры множества.

Длина отрезка	**Площадь многоугольника**	**Объем многогранника**
1. Положительное число	Положительное число	Положительное число
2. Конгруентные отрезки имеют равные длины	Конгруентные многоугольники имеют равные площади	Конгруентные многогранники имеют равные объемы
3. Длина суммы отрезков равна сумме длин этих отрезков	Площадь многоугольника, состоящего из частей (непересекающихся многоугольников), равна сумме площадей этих частей	Объем многогранника, состоящего нз частей (непересекающихся многогранников), равен сумме объемов этих частей
4. Существует отрезок, длина которого равна единице	Существует многоугольник, площадь которого равна единице	Существует многогранник, объем которого равен единице

Нетрудно заметить, что перечисленными свойствами обладает и «число элементов конечного множества» (гл. 3, § 3, 02). Действительно,

а) для любого множества A, отличного от $\varnothing$, $p(A) > 0$;

б) если $A = B$, то $p(A) = p(B)$;

в) если $A \cap B = \varnothing$, то $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;

г) существует множество A такое, что $p(A) = 1$.

§ 3. Геометрическое преобразование и числовая функция — две конкретные модели общего теоретико-множественного понятия отображения одного множества в другое.

В самом общем и абстрактном виде понятие отображения множества M в некоторое множество M' (которое, в частности, может совпадать с множеством M) определяется как закон, или правило, по которому каждому элементу x множества M сопоставляется (ставится в соответствие) определенный, единственный элемент y множества M'.

Элемент y называется образом элемента x в этом отображении множества M в множество M'. Если это отображение обозначить буквой F, то запись «$F(x) = y$» имеет смысл: «образ элемента x в отображении F совпадает с элементом y множества M'». Множество образов всех элементов множества M в этом отображении обозначается символом $F(M)$. Это множество может составлять подмножество M' или совпадать с этим множеством. В последнем случае говорят, что множество M отображается на множество M' (не только в множество M').

Если, кроме того, что каждому элементу x множества M сопоставляется единственный элемент множества M', различным элементам множества M сопоставляются различные элементы множества M', т. е. каждый элемент y множества M' сопоставляется единственному элементу x множества M, то соответствие, которое устанавливается в этом отображении, является в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м и имеет место также такое обратное отображение множества M' на множество M (F^{-1}), что если $F(x) = y$, то $F^{-1}(y) = x$.

Это общее понятие отображения одного множества в другое не должно изучаться в школе. Но, изучая конкретные модели этого понятия, геометрические преобразования и числовые функции, мы должны подчеркивать то главное, что их характеризует как виды отображения. Каждое конкретное геометрическое преобразование характеризуется законом, или правилом, соответствия и двумя множествами точек, из которых одно преобразуется в другое по этому правилу. Это понятие отличается от общего понятия отображения тем, что вместо абстрактных множеств элементов неопределенной природы и абстрактного закона соответствия мы имеем конкретные множества точек и конкретный закон соответствия.

Следует отметить, что имеющаяся у нас практика преподавания геометрических преобразований явно недостаточна ввиду того, что наши программы до недавнего времени недооценивали их значение.

В недавнем прошлом пытались несколько исправить положение включением специальной темы в IX классе. Однако и это решение вопроса об отражении в школьном преподавании идеи геометрических преобразований нельзя считать удовлетворительным, ибо если геометрические преобразования изучались бы раньше, чем в IX классе, и не все в одном месте курса, они могли бы послужить основой для более рационального построения курса геометрии как в теоретической, так и в его практической части.

Не касаясь конкретной методики изучения геометрических преобразований, не входящей в предмет настоящей работы, отметим лишь некоторые трудности в усвоении общего понятия геометрического преобразования, которые наблюдаются в имеющейся практике, и выясним причины этих затруднений.

1. Мы изучаем геометрические преобразования (виды движения и гомотетию) на плоскости. Это значит, что преобразованию подвергается множество точек плоскости (мы говорим просто плоскость, но имеется в виду именно множество точек плоскости, здесь двойственность в понимании термина «плоскость» отнюдь не помогает выяснению ситуации) и результатом этого преобразования является это же множество точек плоскости.

Когда мы говорим о преобразовании «плоскости», это вызывает непонимание именно потому, что учащиеся понимают под плоскостью не множество точек, а носителя этого множества, который не подвергается никакому преобразованию. Они относят преобразование лишь к той отдельной фигуре, которую преобразовывали.

Необходимо уточнить, что речь идет о преобразовании множества точек плоскости, что каждой точке плоскости сопоставляется точка этой же плоскости по заданному закону или правилу.

После того как учащиеся ознакомились с понятием функции, целесообразно показать, что понятия «геометрическое преобразование» и «функция» совпадают с точностью до природы элементов множеств и способа задания закона соответствия. Каждое геометрическое преобразование устанавливает некоторую функцию, только области определения и изменения этой функции являются не числовыми, а точечными множествами, числовая же функция «преобразовывает» одно множество (чисел) в другое (или в это же) по определенному закону.

Такое сопоставление способствует выяснению положения о том, что в геометрическом преобразовании на плоскости множество точек плоскости играет роль областей определения и изменения функции, устанавливаемой в данном преобразовании.

Такая связь между понятиями «геометрическое преобразование» и «функция» в обучении отражает связь в современной трактовке этих понятий как модели более общего и абстрактного теоретико-множественного понятия отображения и способствует лучшему усвоению этих понятий учащимися.

2. Наблюдения показывают, что учащиеся затрудняются ответить на вопрос, чем определяется данное геометрическое

преобразование, или когда можно считать геометрическое преобразование заданным.

Аналогичный вопрос ставится и в учении о функциях. Функция считается заданной, если 1) задана область определения и 2) каким-то способом указано правило, по которому для каждого значения аргумента из заданной области определения функции можем определить соответствующее ему значение функции.

Очевидно, также четко необходимо выяснить этот вопрос относительно геометрических преобразований. Что должен понимать ученик, например, под высказыванием «на плоскости задана симметрия относительно оси x»? Он должен понимать, что подвергается преобразованию множество точек плоскости и что каждой точке A плоскости сопоставляется точка A' этой же плоскости по следующему правилу: *а*) $AA' \perp x$; *б*) A и A' лежат по разные стороны от прямой x и *в*) на равных расстояниях от нее. (Если точка A принадлежит оси x, она совпадает с соответствующей ей точкой.)

3. При изучении функции нас интересует умение находить для каждого значения аргумента (из области определения) соответствующее значение функции. При изучении же геометрических преобразований нас интересует не только преобразование отдельных точек плоскости, но и преобразование определенных подмножеств точек плоскости, фигур (отрезка, прямой, треугольника, круга и т. д.). В связи с этим также возникают некоторые трудности. Учащиеся затрудняются ответить на очень важный вопрос: какие свойства фигур сохраняются неизменными (инвариантны) в данном преобразовании, а какие меняются.

С этой точки зрения важно классифицировать рассматриваемые преобразования по инвариантным свойствам фигур. Фактически мы имеем дело в школе с тремя группами преобразований:

а) преобразования, не деформирующие фигуры, т. е. различные виды движений, переводящие любую фигуру в равную ей, при этом лишь осевая симметрия меняет ориентацию фигуры;

б) преобразования, изменяющие размеры, но сохраняющие форму фигур, т. е. переводящие любую фигуру в подобную ей (гомотетия), и вообще преобразования подобия (композиция гомотетии и движения);

в) преобразования, изменяющие и размеры, и форму фигур, сохраняющие лишь прямолинейное расположение точек и параллельность прямых; это — афинные преобразования, которые пока программой не предусмотрены, но мы с ними неизбежно встречаемся при изображении пространственных тел на плоскости (изображая, например, правильную шестиугольную пирамиду с помощью параллельного проектирования, мы чертим в основании шестиугольник, вообще неправильный, но не произвольный, противоположные стороны его должны быть параллельны). Очевидно, что афинные преобразования должны найти себе место в школьной программе.

Важно, чтобы учащиеся понимали, какое «воздействие» на различные фигуры имеет каждое изучаемое геометрическое преобразование.

§ 4. В геометрии мы имеем дело с классами или множествами объектов, свойствами и отношениями. Свойства одних объектов часто выражаются через отношения между другими объектами. Например, свойство равнобедренности треугольника выражается через отношение равенства двух его сторон, свойство прямого угла — через отношение равенства смежных углов. Выясним, в какой связи находятся свойства (или отношения) с множествами (классами) объектов, обладающих этими свойствами (или находящихся в этих отношениях).

Понятие соединяет в себе множество объектов (объем этого понятия) и характеристическое свойство этого множества (содержание понятия). Это свойство может быть сложной логической структуры, например вида «P_1 и P_2 и P_3 и... и P_n», поэтому иногда говорят во множественном числе о свойствах или существенных признаках P_1, P_2 ..., P_n, характеризующих данное множество объектов.

Если в множестве A имеются элементы, обладающие некоторым свойством P, и элементы, не обладающие этим свойством, то свойство P осуществляет разбиение множества A на два подмножества:

$$B = \underset{x}{M}[x \in A \text{ и } P(x)] \text{ и } \overline{B} = \underset{x}{M}[x \in A \text{ и } \overline{P}(x)],$$

где $P(x)$ обозначает «элемент x обладает свойством P», а $\overline{P}(x)$ —«элемент x не обладает свойством P».

Это разбиение удовлетворяет всем условиям правильного разбиения множества на подмножества (§ 2). Действительно, $B \cup \overline{B} = A$, $B \cap \overline{B} = \varnothing$, а $B \neq \varnothing$ и $\overline{B} \neq \varnothing$, так как в множестве A по условию имеются элементы, обладающие и не обладающие свойством P.

С помощью свойства P мы определили множество B как подмножество множества A. В традиционной логике говорят, что определение построено указанием рода (A) и видового признака или отличия (P).

Мы не склонны пользоваться этой терминологией для разъяснения учащимся логической структуры определения. Конструкцию определения можно легко объяснить на теоретико-множественном языке (или на языке логики предикатов).

Пусть A_1 — множество многогранников, P_1 — свойство, состоящее в том, что весь многогранник расположен по одну сторону от плоскости любой его грани. С помощью этого свойства определяем множество A_2 выпуклых многогранников:

$$A_2 = \underset{x}{M}\,[x \in A_1 \text{ и } P_1(x)].$$

Пусть P_2 — свойство, состоящее в том, что две грани многогранника — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани — параллелограммы, попарно пересекающиеся по параллельным прямым. С помощью свойства P_2 определяем множество A_3 призм:

$$A_3 = \underset{x}{M}\,[x \in A_2 \text{ и } P_2(x)].$$

Пусть P_3 — свойство, состоящее в том, что в основании призмы — параллелограмм. С помощью этого свойства определяем множество A_4 параллелепипедов:

$$A_4 = \underset{x}{M}\,[x \in A_3 \text{ и } P_3(x)].$$

Пусть P_4 — свойство, состоящее в том, что боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны плоскостям оснований. С помощью этого свойства определяем множество A_5 прямых параллелепипедов:

$$A_5 = \underset{x}{M}\,[x \in A_4 \text{ и } P_4(x)].$$

Пусть P_5 — свойство, состоящее в том, что в основании прямого параллелепипеда — прямоугольник. С помощью этого свойства определяем множество A_6 прямоугольных параллелепипедов:

$$A_6 = \underset{x}{M}\,[x \in A_5 \text{ и } P_5(x)].$$

Наконец, пусть P_6 — свойство, состоящее в том, что измерения прямоугольного параллелепипеда равны. С помощью этого свойства определяем множество A_7 кубов:

$$A_7 = \underset{x}{M}\,[x \in A_6 \text{ и } P_6(x)].$$

Мы получили семь множеств, отношения между которыми выражаются следующей цепочкой включений: $A_7 \subset A_6 \subset A_5 \subset$

$\subset A_4 \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$. Целесообразно эти отношения иллюстрировать с помощью кругов (рис. 6).

Нетрудно показать на этом примере, что множество кубов можно определить не только как подмножество прямоугольных параллелепипедов, но и как подмножество любого из множеств $A_1 - A_5$, но в этом случае получится громоздкое определение:

$$A_7 = \underset{x}{M}\,[x \in A_5 \text{ и } P_5(x) \text{ и } P_6(x)] \quad \text{или}$$

$$A_7 = \underset{x}{M}\,[x \in A_3 \text{ и } P_3(x) \text{ и } P_4(x) \text{ и } P_5(x) \text{ и } P_6(x)].$$

Как видно, наиболее простое определение содержит наиболее простое (по своей логической структуре) характеристическое свойство. Это достигается тем, что определяемое множество выражается как подмножество минимального множества, т. е. такого множества, никакое другое подмножество которого, содержащее определяемое множество, ранее не определено (ближайший род, на языке традиционной логики).

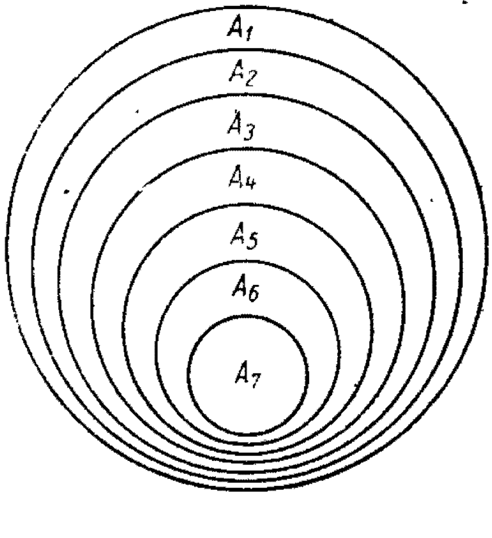


Рис. 6.

Мы должны всегда стремиться строить наиболее простые определения. Только такие определения считаются методически безупречными, если, разумеется, они не страдают другими дефектами.

С той же теоретико-множественной точки зрения можно разъяснить учащимся и сущность некоторых широко распространенных ошибок в определениях.

Например, если свойством P не обладает ни один элемент множества A, то определение множества B, $B = \underset{x}{M}\,[x \in A \text{ и } P\ (x)]$ ничего не определяет (кроме пустого множества). Если, например, ромбом назовем «квадрат с неравными углами», то никакого ромба не определим, так как среди квадратов нет ни одного, обладающего указанным свойством. Мы определили пустое множество.

Поэтому в связи с определением $\underset{x}{M}[x \in A \text{ и } P(x)]$ возникает задача «доказательства существования». Эта задача состоит именно в доказательстве существования в множестве A элементов (хотя бы одного), обладающих свойством P.

Например, определяя прямоугольный треугольник как треугольник с прямым углом, мы доказываем его существование непосредственным построением такого треугольника. Если же мы определим «двупрямоугольный» треугольник как треугольник с двумя прямыми углами, то нетрудно доказать, что в множестве треугольников не существует ни один такой треугольник, и это определение должно быть отброшено, ибо оно определяет то, что не существует.

Приведенный выше пример определения видов многогранников может использоваться и для разъяснения невозможности такого определения для универсального множества (основных объектов).

Действительно, множество A_1 многогранников может определяться как подмножество множества A геометрических тел с помощью свойства P, состоящего в том, что геометрическое тело ограничено плоскостями:

$$A_1 \stackrel{\perp}{=} \underset{x}{M}[x \in A \text{ и } P(x)].$$

Тогда возникает вопрос, а как определить множество A геометрических тел? Геометрическое тело можно определить как подмножество точек пространства, ограниченное каким-то образом в пространстве (не обязательно плоскостями, может быть какой-нибудь кривой поверхностью), т. е. если Y — множество точек пространства (универсальное множество) и P' — свойство, выражающее ограниченность подмножества точек пространства, то определение множества геометрических тел получается в виде

$$A = \underset{x}{M}[x \subseteq Y \text{ и } P'(x)].$$

Совершенно очевидно, что дальше идти таким путем невозможно. Множество Y всех точек пространства (универсальное множество) нельзя уже определить как подмножество другого (более широкого) множества геометрических элементов. Множество Y косвенно определяется с помощью аксиом.

§ 5. В доказательствах геометрических теорем широко применяются силлогистические формы умозаключений. Но для того, чтобы научить учащихся (VIII—IX классов) производить логический анализ этих умозаключений с целью выяснения их безошибочности или обнаружения ошибки, нет надобности изучать в школе аристотелевскую силлогистику.

В этом мы убедились на опыте в процессе проведенного эксперимента. Те правила вывода, которые выражаются средствами логики высказываний, удобно разъяснить учащимся на языке этой логики (гл. 5), другие же правила логического вывода, представляющие собой различные модусы категорического силлогизма, могут подвергаться анализу без специального изучения силлогистики, на базе теоретико-множественных идей.

Категорический силлогизм с теоретико-множественной точки зрения представляет собой решение следующей задачи трех множеств (или трех классов). Известны отношения между множествами A и B (AR_1B) и между множествами B и C (BR_2C). Требуется определить отношение R_3 между множествами A и C.

Модусы силлогизма дают заключение об отношении R_3 между множествами A и C во всех тех и только в тех случаях, когда известные отношения R_1 и R_2 между A и B и между B и C соответственно однозначно определяют отношение между множествами A и C. В тех же случаях, когда отношение R_3 не определяется однозначно отношениями R_1 и R_2, т. е. множества A и C могут находиться в различных отношениях, допускаемых отношениями R_1 и R_2, категорический силлогизм никакого заключения не дает (из посылок AR_1B и BR_2C не следует никакое заключение типа AR_3C).

Покажем на нескольких конкретных примерах, как можно построить анализ силлогистических рассуждений, используя лишь элементарные теоретико-множественные понятия.

1. Рассмотрим в качестве примера следующее рассуждение: «куб есть параллелепипед, а параллелепипед — призма, следовательно, куб — призма».

В этом рассуждении применено некоторое правило вывода, о чем свидетельствует слово «следовательно», отделяющее посылки от заключения. Чтобы выяснить логическую структуру вывода, сущность примененного здесь правила, необходимо отвлечься от содержания этого рассуждения. Прежде всего заметим, что когда говорим «куб — параллелепипед», «параллелепипед — призма» и т. д. имеем в виду «все кубы суть параллелепипеды», «все параллелепипеды — призмы» и т. д.

Обозначим: множество кубов буквой A, множество параллелепипедов буквой B и множество призм буквой C.

Тогда в посылках утверждается об отношении включения множества A в множество $B (A \subset B)$ и множества B в множество C $(B \subset C)$, а заключение утверждает, что множество A включается в множество $C (A \subset C)$, т. е. примененное в нашем рассуждении правило логического вывода имеет следующую схему: $\frac{A \subset B,\ B \subset C}{A \subset C}$ (схема правила вывода записывается обычно так: над чертой записываются посылки, под чертой заключение).

Как показать, что отношение $A \subset C$ действительно следует из отношений $A \subset B$ и $B \subset C$, т. е. если истинны посылки $A \subset B$ и $B \subset C$, то истинно и высказывание $A \subset C$?

Это легко показать, изображая множества A, B и C кругами (мы уже это сделали при решении упражнений — гл. 4, § 1).

Действительно, если изобразить множества A, B и C кругами так, чтобы круг A лежал внутри круга $B(A \subset B)$, а круг B — внутри круга $C(B \subset C)$, то окажется, что круг A лежит и внутри круга C (рис. 7). Таким образом, заключение действительно следует из посылок и наше рассуждение правильно.

Примененное здесь правило вывода основано на свойстве транзитивности отношения включения: «**если** $A \subset B$ **и** $B \subset C$, **то** $A \subset C$», которое наглядно иллюстрируется с помощью кругов (в гл. 5 будет показано, как можно несколько иначе сформулировать рассуждение, подобное нашему, чтобы свести его к правилу вывода, выражаемому средствами логики высказываний).

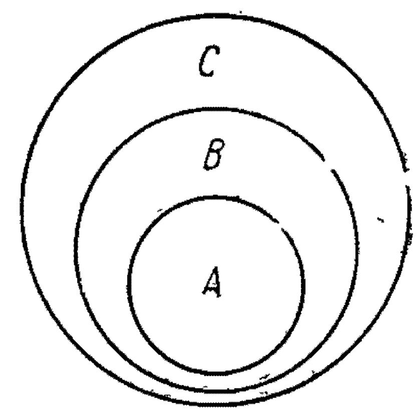


Рис. 7.

2. В качестве второго примера возьмем следующее рассуждение: «Параллелограмм есть четырехугольник с попарно параллельными сторонами. Ромб имеет попарно параллельные стороны. Следовательно, ромб есть параллелограмм».

Поступая как в предыдущем примере, получаем следующую схему вывода: $\dfrac{A \subset B,\ C \subset B}{C \subset A}$, где A — множество параллелограммов, B — множество четырехугольников с попарно параллельными сторонами, C — множество ромбов.

Нетрудно заметить, что заключение $C \subset A$ не следует из посылок.

Действительно, если изобразить множества A, B и C кругами так, чтобы круги A и C лежали внутри круга $B(A \subset B$ и $C \subset B)$, то этим взаимное расположение двух кругов A и C однозначно не определяется, они могут быть расположены по разному (рис. 8 *а, б, в, г*). (Если исходить из традиционной классификации силлогизмов, то этот силлогизм построен по второй фигуре, средний термин B не распределен ни в одной посылке как предикат в общеутвердительных высказываниях и поэтому не связывает посылки.)

Высказывание «ромб есть параллелограмм», разумеется, истинное высказывание, но оно не следует из приведенных двух посылок.

Исходя из конкретного содержания рассуждения, $A = B$, но мы можем выводить из посылок лишь такие заключения, которые следуют из них в силу одной их логической формы, независимо от их содержания. Когда же мы говорим «A есть B» в смысле «все элементы множества A суть элементы множества B», под этим понимают вообще отношение включения, а не частный случай — равенство, ибо, отвлекаясь от

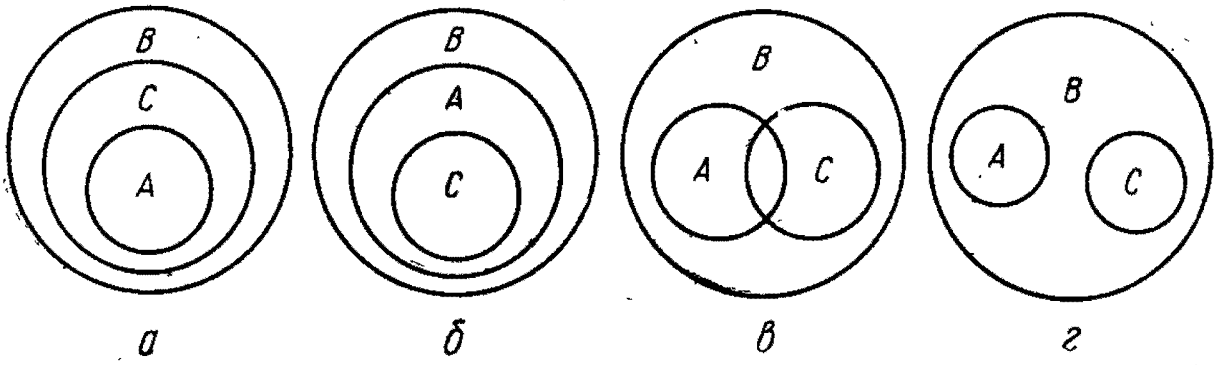


Рис. 8.

содержания высказывания, мы не уверены, что и все элементы множества B суть элементы множества A. По существу, отвлекаясь от содержания рассуждения, под A, B, C понимаем переменные, на место которых можно подставить любые конкретные множества, лишь бы были истинными посылки $A \subset B$ и $B \subset C$.

Чтобы исправить приведенное неправильное рассуждение, достаточно вместо посылки $A \subset B$ взять $B \cup A$. Тогда на основании транзитивности отношения включения **«если** $C \subset B$ **и** $B \subset A$, **то** $C \subset A$» получим правильное рассуждение.

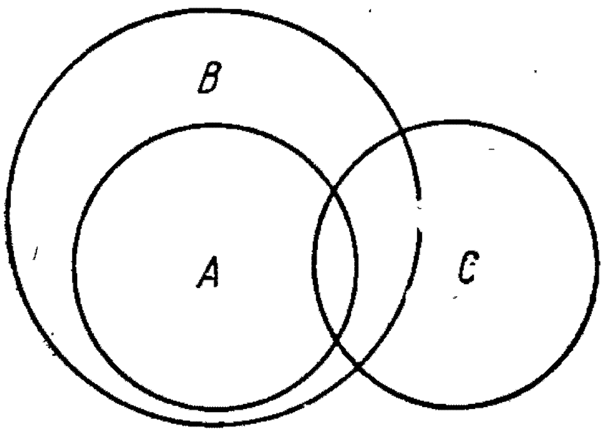


Рис. 9.

3. Из посылок «все ромбы — параллелограммы» и «некоторые прямоугольники — ромбы» мы можем сделать лишь заключение «некоторые прямоугольники — параллелограммы». Это заключение кажется учащимся неправильным, потому что им известно больше, а именно что все прямоугольники — параллелограммы.

Важно уметь различать истинность высказывания от того, следует ли оно или нет из данных посылок.

Пусть A — множество ромбов, B — множество параллелограммов, C — множество прямоугольников. Наши посылки утверждают: $A \subset B$ и $C \cap A \neq \varnothing$. Расположим круги A, B, C так, чтобы круг A лежал полностью внутри круга B $(A \subset B)$, а круг C пересекал круг A $(C \cap A \neq \varnothing)$ (рис. 9). Из данных посылок следует только, что некоторые прямоугольники — параллелограммы ($C \cap B \neq \varnothing$).

Высказывание «все прямоугольники — параллелограммы» истинно, но не следует из данных посылок.

Мы здесь пользовались термином «следует» (заключение следует из посылок). В главе 5 будет уточнено, что мы должны понимать под выражением «одно высказывание логически следует из другого (или из других)», а в гл. 7 будет дано определение этого важного логического отношения между высказываниями.

Глава 5. Изучение и применение логических операций и правил вывода в курсе геометрии

В настоящей главе рассматривается методика постепенного ознакомления учащихся с некоторыми логическими операциями и правилами вывода, которые применяются при изучении геометрии.

Имеется в виду, что логический материал, с которым знакомятся учащиеся, не будет сконцентрирован в одном месте курса. Изучение элементов логического языка геометрии понимается и строится не как приложение к преподаванию геометрии, а как его неотъемлемая часть и поэтому оно должно быть надлежащим образом распределено на большом участке курса геометрии (VII—IX классы).

Этим обусловлено разделение изложенного ниже логического материала на небольшие дозы, которые могут рассматриваться на различных уроках, в разное время, на различном геометрическом материале.

В приведенном изложении мы не указываем, на каких уроках следует изучать те или иные логические операции и правила вывода. Использованный нами геометрический материал может быть соответствующим образом заменен другим конкретным геометрическим материалом той же логической структуры. В настоящей главе приводятся некоторые примеры применения логических знаний учащихся в курсе геометрии.

Описанное ниже ознакомление учащихся с логическими операциями и правилами вывода в курсе геометрии переплетается с аналогичной работой в курсе алгебры (гл. 6). Эта работа завершается систематизацией и обобщением уже приобретенных учащимися знаний в области логики и теории множеств (гл. 7).

01. В геометрии, как и в арифметике и алгебре, мы имеем дело с различными высказываниями.

Всякое высказывание выражает какое-нибудь свойство предмета или отношение между предметами. Например, высказывание «данный треугольник — равнобедренный» выражает свойство данного треугольника, состоящее в его принадлежности к множеству равнобедренных треугольников; высказывание «$a \parallel b$» («прямая a параллельна прямой b») выражает отношение (параллельности), в котором находятся две прямые a и b; высказывание «всякий ромб есть параллелограмм» выражает отношение включения, в котором находятся множества ромбов и параллелограммов.

Каждое высказывание может быть истинным или ложным, но не может быть одновременно и истинным, и ложным. Например, если треугольник, о котором идет речь в высказывании «данный треугольник — равнобедренный» действительно принадлежит множеству равнобедренных треугольников (имеет две равные стороны), то это высказывание истинно, в противном случае оно ложно. Кроме того, так как один и тот же треугольник не может и принадлежать и не принадлежать множеству равнобедренных треугольников, то это высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Истинное высказывание обозначим для удобства сокращенно буквой «И», ложное — буквой «Л». «И» и «Л» будут также называться значениями истинности высказывания.

02. С точки зрения грамматической высказывание представляет собой предложение. Однако не всякое предложение является высказыванием. Под высказыванием понимаем лишь такое предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.

С этой точки зрения вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями. Не являются также высказываниями и предложения, в которых подлежащее представляет собой не название конкретного объекта из данного множества, а переменную, на место которой можно подставить название произвольного объекта из этого множества. Например, предложение «город x — столица БССР» не является высказыванием, ибо мы не можем о нем сказать, истинно оно или ложно (в нем подлежащее содержит переменную x). Если же подставить вместо x название конкретного города, это предложение обращается в истинное или ложное высказывание («город Минск — столица БССР» — истинное высказывание, «город Могилев — столица БССР» — ложное высказывание).

Аналогично предложение «x — равнобедренный треугольник», где x — переменная, на место которой можно подставить название произвольного элемента множества треугольников, не является высказыванием. Оно обращается в истинное или ложное высказывание при подстановке вместо x названия определенного треугольника, например $\triangle ABC$.

02.1. Понятие высказывания уже подготавливалось в процессе решения упражнений на числовых множествах (гл. 3) и получит дальнейшее уточнение в учении об уравнениях и неравенствах (гл. 6). Поэтому рассмотрение этого понятия в курсе геометрии является лишь промежуточным звеном процесса его формирования.

03. Каждое из приведенных выше (01) высказываний таково, что никакая часть его уже не составляет высказывание.

Такие высказывания называют элементарными.

В большинстве своем геометрические предложения (аксиомы, теоремы, определения) представляют собой сложные высказывания, определенным образом составленные из элементарных высказываний.

Например, предложение «Если $\triangle ABC$ — равнобедренный $(AB = BC)$ и BD — высота $(BD \perp AC)$ или BD — медиана $(AD = DC)$, то $\angle ABD = \angle DBC$» — сложное высказывание, состоящее из четырех элементарных высказываний: «$\triangle ABC$ — равнобедренный» (1), «BD — высота» (2), «BD — медиана» (3), «$\angle ABD = \angle DBC$» (4), определенным образом связанных между собой с помощью слов: «и», «или», «если, то» («**Если** имеет место (1) и имеет место (2) **или** (3), **то** имеет место (4)».)

Слова «не», «и», «или», «если, то» играют роль логических связок, или операторов, обозначающих определенные логические операции над элементарными и сложными высказываниями.

В частности, в нашем примере утверждается, что высказывание (4) следует из высказывания «[(1) и ((2) **или** (3))]». Но что это значит? Каков точный смысл утверждения о том, что одно высказывание **следует** из другого?

Изучая геометрию, мы на каждом шагу встречаем такие и другие логические отношения и операции, но выполняем эти операции в неявном виде, т. е. не выделяем их и не выясняем их точный смысл. Восполним в некоторой мере этот пробел. Понимание точного смысла выполняемых нами логических операций поможет нам лучше усвоить курс геометрии и понимать его построение.

04. Наиболее простой логической операцией, выполняемой над одним высказыванием, является отрицание.

В обыденной речи отрицание осуществляется с помощью частицы «не». Например, отрицанием высказывания «точка A принадлежит прямой a» («$A \in a$») является высказывание «точка A **не** принадлежит прямой a». Очевидно, если первое высказывание истинно, второе ложно, если первое ложно, второе истинно.

Мы приходим к следующему определению отрицания: **отрицанием** данного высказывания называется такое высказывание, которое истинно, когда данное высказывание ложно, и ложно, когда данное высказывание истинно. (Под отрицанием понимаем результат одноименной операции.)

Отрицание некоторого высказывания «X» обозначим символом «$\overline{X}$» (X с чертой). Например, отрицание высказывания «$A \in a$» обозначим символом «$\overline{A \in a}$» (раньше мы писали $A \notin a$), отрицание высказывания «$a \| в$» — символом «$\overline{a \| в}$».

Определение отрицания может быть записано в виде следующей таблицы:

X	$\overline{X}$
И	Л
Л	И

В ней указано, какие значения истинности (И, Л) принимает отрицание $\overline{X}$ в зависимости от значений истинности высказывания X.

Нетрудно заметить, что высказывание X является отрицанием высказывания $\overline{X}$ (удовлетворяет определению отрицания). Таким образом, дважды последовательно выполненная над высказыванием X операция отрицания $(\overline{\overline{X}})$ приводит снова к этому же высказыванию. Например, отрицая, что «точка A не принадлежит прямой a», мы приходим к первоначальному высказыванию «точка A принадлежит прямой a».

05. В обыденной речи союз «или» применяется в двух различных смыслах: в соединительном, когда сложное высказывание, образованное с помощью этого союза, считается истинным, когда истинно хотя бы одно из составляющих высказываний, и в разделительном, когда сложное высказывание считается истинным, когда истинно только одно из составляющих высказываний (в этом случае говорят «или..., или»). Пусть, например, имеем два высказывания:

«$A \in a$ или $A \in в$» (1) и

«или $A \in a$, или $A \in в$» (2).

Высказывание (1), в котором союз «или» применен в соединительном (неразделительном) смысле, истинно, если истинно хотя бы одно из составляющих его элементарных высказываний, т. е. если «$A \in a$» истинно и «$A \in в$» ложно, или если «$A \in a$» ложно и «$A \in в$» истинно, или «$A \in a$» и «$A \in в$» истинны.

Высказывание (2), в котором союз «или» применен в разделительном смысле, надо понимать как истинное, если истинно только одно из составляющих его элементарных высказываний, т. е. если «$A \in a$» истинно и «$A \in в$» ложно, или если «$A \in a$» ложно и «$A \in в$» истинно.

Определим логическую операцию над высказываниями, соответствующую связке «или» в соединительном смысле. Результат этой логической операции над двумя (или более) высказываниями называется д и з ъ ю н к ц и е й этих высказываний.

Таким образом, дизъюнкцией двух высказываний называется такое новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний.

Дизъюнкцию высказываний X и Y обозначим символом «$X \vee Y$» (т. е. знак «$\vee$» заменяет союз «или» в соединительном смысле).

Определение дизъюнкции может быть записано в виде следующей таблицы:

X	Y	$X \vee Y$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

В первых слева двух столбцах таблицы выписаны всевозможные комбинации значений истинности двух данных высказываний, а в третьем столбце размещены соответствующие значения их дизъюнкции.

Как видно, дизъюнкция двух высказываний ложна только в том случае, когда оба эти высказывания ложны.

Определение дизъюнкции распространяется на любое число высказываний. Например, дизъюнкция $X \vee Y \vee Z$ истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний X, Y или Z, и ложна, когда ложны все эти высказывания.

06. Логическая операция, которую мы выполняем над двумя высказываниями, соединяя их союзом «и», приводит к новому высказыванию, называемому их к о н ъ ю н к ц и е й.

Например, известная теорема о средней линии трапеции (средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме) представляет собой сложное высказывание, состоящее из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т. е. представляет собой конъюнкцию двух высказываний («средняя линия трапеции параллельна основаниям» и «средняя линия трапеции равна полусумме оснований»). Это сложное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба составляющие его элементарные высказывания; доказательство этой теоремы, т. е. установление истинности этого сложного высказывания, состоит из установления истинности каждого из составляющих элементарных высказываний. Если же хотя бы одно из этих высказываний ложно, то ложна и их конъюнкция.

Таким образом, исходя из обычного смысла союза «и», приходим к следующему определению соответствующей логической операции: конъюнкцией двух высказываний X и Y называется такое новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания X и Y. Обозначим это новое высказывание символом «$X \wedge Y$» (знак «$\wedge$» заменяет союз «и»).

Определение конъюнкции может быть записано в виде следующей таблицы:

X	Y	$X \wedge Y$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Определение конъюнкции, как и определение дизъюнкции, распространяется на любое число высказываний. Например, конъюнкция $(A \in a) \wedge (B \in a) \wedge (C \in a)$ истинна в том и только в том случае, когда истинны все элементарные высказывания $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, т. е. когда все три точки A, B, C принадлежат прямой a.

07. Если, например, буквами X и Y обозначаются определенные высказывания, то и дизъюнкция $X \vee Y$ и конъюнкция $X \wedge Y$ представляют собой определенные высказывания. Если же буквами X и Y обозначаются п е р е м е н н ы е, вместо которых можно подставить произвольные высказывания, подобно тому как в алгебре мы применяем переменные, вместо которых можно подставить произвольные числа из некоторого множества, то дизъюнкция $X \vee Y$ и конъюнкция $X \wedge Y$ тоже представляют собой переменные, которые обращаются в высказывания (истинные или ложные) в зависимости от значений истинности переменных X и Y, т. е. от истинности или ложности подставляемых вместо X и Y конкретных высказываний. Таким образом, $X \vee Y$ и $X \wedge Y$, где X и Y — переменные, представляют собой лишь формы для высказываний, обращающиеся в высказывания при подстановке вместо переменных каких-то определенных высказываний. Мы будем говорить иногда «высказывание» в смысле «форма для высказывания».

Здесь имеет место то же, что в алгебре. Выражения «$x + y$», «$x \cdot y$», где x и y — числовые переменные, представляют собой также числовые переменные, формы для чисел, обращающиеся в числа при подстановке вместо x и y их значений из данного числового множества.

Сложное высказывание, составленное из элементарных с помощью логических операций, назовем формулой.

Нетрудно заметить, что из определения дизъюнкции непосредственно следует, что формулы $X \vee Y$ и $Y \vee X$ при любых значениях истинности переменных обращаются обе либо в истинные высказывания, либо в ложные, т. е. обе принимают значение И или значение Л. Такие формулы называются равными или эквивалентными. Эквивалентность обозначим символом « $\longleftrightarrow$ » (или обычным знаком равенства « = »).

Таким образом, имеет место эквивалентность $X \vee Y = Y \vee X$, выражающая закон коммутативности дизъюнкции, также как в алгебре тождество $x + y = y + x$ выражает закон коммутативности сложения.

Еще раньше (04) мы установили эквивалентность $\overline{\overline{X}} = X$, выражающую закон двойного отрицания, похожую на тождество «$-(-X) = X$», выражающее связь между противоположными числами.

Эквивалентность формул, выражающих сложные высказывания, имеет такую же силу, как и тождественность выражений в алгебре. Точно так же, как, например, выражение $a^2 + 2ab + b^2$ можно всюду, где оно встречается, заменить тождественным ему выражением $(a + b)^2$ или, наоборот, каждое из двух эквивалентных высказываний может быть заменено другим всюду, где оно встречается в рассуждениях. Например, высказывание «неверно, что точка A не принадлежит прямой a» мы можем заменить в наших рассуждениях эквивалентным ему высказыванием «точка A принадлежит прямой a» на основании закона двойного отрицания, так как $\overline{\overline{A \in a}} = A \in a$.

Кроме закона двойного отрицания и закона коммутативности дизъюнкции, имеется ряд других законов, выражающих свойства логических операций.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые из этих свойств.

08. Если, например, высказывание «$A \in a$» истинно, то его отрицание «$\overline{A \in a}$» ложно, если же «$A \in a$» ложно, то «$\overline{A \in a}$» истинно. Следовательно, дизъюнкция $(A \in a) \vee (\overline{A \in a})$ всегда истинна, а конъюнкция $(A \in a) \wedge (\overline{A \in a})$ всегда ложна.

Если заменить высказывание «$A \in a$» произвольным высказыванием X, получим:

$$X \vee \overline{X} = \text{И}, \tag{1}$$

$$X \wedge \overline{X} = \text{Л}. \tag{2}$$

Доказательство эквивалентностей (1) и (2) состоит в их проверке для любых значений истинности произвольного высказывания X. Это доказательство может быть записано в виде следующей таблицы:

X	$\overline{X}$	$X \vee \overline{X}$	$X \wedge \overline{X}$
Л	И	И	Л
И	Л	И	Л

Согласно (1), так как дизъюнкция $X \vee \overline{X}$ всегда истинна, одно из двух высказываний X или $\overline{X}$ (не X) всегда истинно (закон исключенного третьего).

Согласно (2), так как конъюнкция $X \wedge \overline{X}$ всегда ложна, одно из высказываний X или $\overline{X}$ всегда ложно (закон противоречия).

Законы исключенного третьего и противоречия находят широкое применение в практике математических доказательств. В частности, в косвенном доказательстве (традиционно называемом доказательством «от противного», хотя следовало бы называть доказательством «от противоречащего»), вместо того, чтобы доказать истинность высказывания X, доказываем ложность высказывания $\overline{X}$ и по закону исключенного третьего приходим к выводу об истинности высказывания X. (Так как $X \vee \overline{X} =$ И и $\overline{X} =$ Л, то, заменяя в $X \vee \overline{X} =$ И высказывание $\overline{X}$ через эквивалентное ему высказывание Л (ложное высказывание), получаем $X \vee$ Л $=$ И и, согласно определению дизъюнкции, $X =$ И.)

Если нам нужно опровергнуть некоторое высказывание X, т. е. доказать, что оно ложно, иногда легче доказать, что его отрицание $\overline{X}$ истинно. Тогда по закону противоречия приходим к выводу о ложности высказывания X. (Так как $X \wedge \overline{X} =$ Л и $\overline{X} =$ И, то, подставляя вместо $\overline{X}$ эквивалентное ему высказывание И (истинное высказывание) в $X \wedge \overline{X} =$ Л, получаем $X \wedge$ И $=$ Л и по определению конъюнкции $X =$ Л.)

09. Очевидно, высказывание «**неверно,** что точка A принадлежит прямой a **или** точка A принадлежит прямой b» эквивалентно высказыванию «точка A **не** принадлежит прямой a и точка A **не** принадлежит прямой b» (подчеркивание логических связок облегчает переход от словесной к символической записи высказываний)[1], т. е. имеет место эквивалентность:

$$\overline{(A \in a) \vee (A \in b)} = [\overline{(A \in a)} \wedge \overline{(A \in b)}].$$

[1] Словами «неверно, что» обозначается отрицание всего следующего за ними высказывания.

Высказывание «**неверно**, что точка A принадлежит прямой a **и** точка A принадлежит прямой b» эквивалентно высказыванию «точка A **не** принадлежит прямой a **или** точка A **не** принадлежит прямой b», т. е. имеет место эквивалентность:

$$\overline{(A \in a) \wedge (A \in b)} = [\overline{(A \in a)} \vee \overline{(A \in b)}].$$

Нетрудно доказать, что эти эквивалентности не зависят от содержания фигурирующих в них элементарных высказываний.

Заменим элементарное высказывание $A \in a$ произвольным высказыванием X, а элементарное высказывание $A \in b$ произвольном высказыванием Y[1]. Тогда эти эквивалентности примут следующий вид:

$$\overline{X \vee Y} = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \qquad (1)$$

$$\overline{X \wedge Y} = (\overline{X} \vee \overline{Y}). \qquad (2)$$

Эти эквивалентности легко устанавливаются, исходя из определений отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

Докажем эквивалентность (1).

Дизъюнкция $X \vee Y$ ложна, а, следовательно, ее отрицание $\overline{X \vee Y}$ истинно, тогда и только тогда, когда оба высказывания X и Y ложны, т. е. когда их отрицания $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ истинны и в этом же и только в этом случае истинна и конъюнкция $\overline{X} \wedge \overline{Y}$.

Дизъюнкция $X \vee Y$ истинна, а, следовательно, ее отрицание $\overline{X \vee Y}$ ложно, тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний X или Y истинно, т. е. когда хотя бы одно из высказываний $\overline{X}$ или $\overline{Y}$ ложно, и в этих же и только в этих случаях ложна и конъюнкция $\overline{X} \wedge \overline{Y}$.

Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$\overline{X \vee Y} = (\overline{X} \wedge \overline{Y}).$$

Доказательство эквивалентности может быть осуществлено с помощью таблицы, в которой для всевозможных комбинаций значений истинности элементарных высказываний определяются соответствующие значения истинности для сложных высказываний, образующих левую и правую части доказываемой эквивалентности. Если эти значения одинаковы во всех строках таблицы, то эквивалентность действительно имеет место.

[1] X и Y — переменные для высказываний.

Ниже приводится таблица, доказывающая эквивалентность (2):

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$
Л	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	И	И
И	И	И	Л	Л	Л	Л

10. Очень часто в математике, в частности и в геометрии, для формулировки теорем мы пользуемся сложными высказываниями, состоящими из двух высказываний (элементарных или, в свою очередь, сложных), соединенных словами «если ..., то».

Пример такого сложного высказывания приведен выше (03).

Такие сложные высказывания мы обычно понимаем как высказывания о логическом следовании. Так, высказывание «если X, то Y», которое мы в дальнейшем обозначим символом «$X \rightarrow Y$», понимается как высказывание о том, что Y логически следует из X. Но что это значит? Под этим обычно понимают, что если только X истинно, то и Y должно быть истинно, иначе высказывание о том, что Y логически следует из X, ложно.

В высказывании $X \rightarrow Y$, называемом обычно у с л о в н ы м, X называется о с н о в а н и е м, а Y — с л е д с т в и е м.

Логическая связь основания и следствия характеризуется тем, что истинность основания определяет истинность следствия, но истинность следствия не определяет однозначно значение истинности основания, которое может быть в этом случае как истинным, так и ложным. Ложность следствия определяет ложность основания, но ложность основания не определяет однозначно значение истинности следствия, которое может быть в этом случае как истинным, так и ложным.

Рассмотрим в качестве примера высказывание «если многоугольник — правильный, то около него можно описать окружность». Доказательство истинности этого высказывания состоит в том, что, предполагая истинным основание («многоугольник — правильный»), доказываем, что при этих условиях истинно и следствие («около него можно описать окружность»). Однако, если многоугольник не является правильным (основание ложно), нельзя утверждать, что около него нельзя описать окружность (т. е. что следствие ложно). Если же около данного многоугольника нельзя описать окружность (следствие ложно), то можно с уверенностью утверждать, что этот многоугольник не есть правильный (основание ложно). Но если около многоугольника можно описать окружность (следствие истинно), нельзя утверждать, что он правильный (т. е. что основание истинно).

Условное высказывание ложно только в том случае, когда основание истинно, а следствие ложно. Так, например, ложность высказывания «если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб» доказывается обычно построением четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, но который не является ромбом, т. е. доказывается, что имеет место случай, когда основание истинно, а следствие ложно.

Для определения сложного высказывания $X \rightarrow Y$ воспользуемся логической характеристикой условного высказывания, т. е. тем, что оно ложно только в том случае, когда основание истинно, а следствие ложно; при всех же других комбинациях значений истинности основания и следствия оно истинно.

Это определение может быть записано в виде следующей таблицы:

X	Y	$X \rightarrow Y$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Высказывание $X \rightarrow Y$, удовлетворяющее этому определению, называется *импликацией*.

Следует отметить, что не всякая импликация представляет собой условное высказывание в обычном смысле. Действительно, данному определению импликации одинаково удовлетворяют и высказывание «если ΔABC — равносторонний, то его углы равны», которое является истинным условным высказыванием в обычном смысле, и высказывание «если ΔABC — равносторонний, то число 5 — простое», которое является истинной импликацией (так как следствие «число 5 — простое» — истинное высказывание; эта импликация истинна независимо от значения истинности основания — 2-я и 4-я строки таблицы), но не является условным высказыванием в обычном смысле.

В условном высказывании основание и следствие связаны между собой не только той логической связью (связью между значениями истинности), которой определяется импликация, но и по содержанию. Таким образом, условное высказывание — особый вид импликации (множество условных высказываний — подмножество множества импликаций). Поэтому все, что, отвлекаясь от содержания основания и следствия, узнаем о любой импликации, имеет силу и для условного высказывания в обычном смысле.

Исходя из определения импликации и обычного понимания условного высказывания, как высказывания о логическом следовании, можно сказать, что если высказывание Y логически следует из высказывания X, то импликация $X \rightarrow Y$ истинна. Если же $X \rightarrow Y$ истинна, то Y может и не следовать из X в обычном смысле, так как X и Y могут быть различного содержания. Нас здесь интересуют лишь случаи, когда одно высказывание следует из другого в силу лишь своей логической структуры, независимо от содержания.

Например, из высказывания «данный треугольник прямоугольный или тупоугольный» следует высказывание «данный треугольник тупоугольный или прямоугольный», так же как из высказывания «$a > 0$ или $a = 0$» следует высказывание «$a = 0$ или $a > 0$» в силу их логической структуры, так как импликация $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$ истинна, независимо от содержания элементарных высказываний X и Y.

(К понятию о логическом следовании и его связи с импликацией еще вернемся в дальнейшем.)

10.1. Если истинны импликации $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$, то высказывания X и Y эквивалентны.

Действительно, если истинна импликация $X \rightarrow Y$, то не может быть X истинно и Y ложно; если истинно $Y \rightarrow X$, то не может быть Y истинно и X ложно, т. е. X и Y оба истинны или оба ложны.

Таким образом, высказывание $X \longleftrightarrow Y$ равносильно конъюнкции $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$. (Отсюда и происхождение знака «$\longleftrightarrow$», напоминающего о двойной импликации $X \rightleftarrows Y$.)

11. Так как высказывание $X \rightarrow Y$ ложно в том и только в том случае, когда X истинно и Y ложно, то в этом и только в этом случае истинно его отрицание $\overline{X \rightarrow Y}$. В этом и только в этом случае истинна также конъюнкция $X \wedge \overline{Y}$. Следовательно, высказывание $\overline{X \rightarrow Y}$ эквивалентно высказыванию $X \wedge \overline{Y}$, т. е.

$$\overline{X \rightarrow Y} \leftrightarrow (X \wedge \overline{Y}).$$

Если два высказывания эквивалентны, то и их отрицания также эквивалентны, т. е.

$$\overline{\overline{X \rightarrow Y}} \leftrightarrow \overline{X \wedge \overline{Y}}.$$

Применяя закон двойного отрицания и свойство 09 (2), получаем:

$$(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \vee Y).$$

Эту эквивалентность легко доказать и с помощью соответствующей таблицы. (Целесообразно предложить учащимся составить эту таблицу.)

Полученное выражение импликации через отрицание и дизъюнкции находит широкое применение при решении различных логических задач. В дальнейшем нам встретятся такие задачи.

12. Описанный выше логический аппарат оказывается недостаточным для выражения математических предложений. В частности, с помощью этого аппарата мы не можем выразить то логически существенное, что различает, например, предложение:

все точки прямой a принадлежат плоскости α» (X)

от предложения:

«существует точка прямой a, принадлежащая плоскости α» (Y).

Для выражения таких предложений введем **кванторы общности** (A), (a), (α) и **кванторы существования** $(\exists A)$, $(\exists a)$, $(\exists \alpha)$.

Символами (A), (a), (α) обозначим выражения: «для всех точек A» (или «для любой точки A»), «для всех прямых a», «для всех плоскостей α» соответственно.

Символами $(\exists A)$, $(\exists a)$, $(\exists \alpha)$ обозначим выражения: «существует точка A такая, что...», «существует прямая a такая, что...», «существует плоскость α такая, что...» соответственно, причем под «существует» понимаем «существует хотя бы одна...»

С помощью квантора общности предложение (X) записывается следующим образом:

$$(A)[(A \in a) \to (A \in \alpha)].$$

(«Любая точка A, если она принадлежит прямой a, то она принадлежит и плоскости α». Это и значит, что «все точки прямой a принадлежат плоскости α».)

Предложение (Y) с помощью квантора существования записывается следующим образом:

$$(\exists A)[(A \in a) \wedge (A \in \alpha)].$$

(«Существует точка A такая, что она принадлежит прямой a и плоскости α».)

Вообще, если какое-нибудь свойство P имеет место для всех элементов x некоторого множества, мы это записываем так: «(x) P (x)» («для всех x имеет место свойство P»).

Высказывание «неверно, что для всех x имеет место свойство P», т. е. отрицание высказывания (x) P (x), обозначаемое символом $\overline{(x)}$ P (x), очевидно, равносильно высказыванию «существует x, для которого не имеет место свойство P», обозначаемое символом $(\exists x)$ $\overline{P}$ (x).

Мы получили равносильность:

$$\overline{(x)}P(x) \leftrightarrow (\exists x)\overline{P}(x), \tag{1}$$

выражающую правило преобразования отрицания высказывания, начинающегося с квантора общности.

Аналогично, отрицая высказывание $(\exists x)\ P\ (x)$, т. е., утверждая, что «не существует x, для которого имеет место свойство P», мы утверждаем, что «для всякого x имеет место свойство не P». Получаем равносильность:

$$\overline{(\exists x)}\ P(x) \leftrightarrow (x)\overline{P}(x). \tag{2}$$

Например, отрицая существование общей точки прямой a и плоскости α:

$$\overline{(\exists A)}[(A \in a) \wedge (A \in \alpha)],$$

мы утверждаем, что «для любой точки A не являются истинными одновременно высказывания $A \in a$ и $A \in \alpha$», т. е.

$$\overline{(\exists A)}[(A \in a) \wedge (A \in \alpha)] \leftrightarrow (A)[\overline{(A \in a) \wedge (A \in \alpha)}]$$

или, применяя свойство 09 (2), получаем

$$\overline{(\exists A)}[(A \in a) \wedge (A \in \alpha)] \leftrightarrow (A)[\overline{A \in a} \vee \overline{A \in \alpha}],$$

т. е. высказывание «неверно, что существует общая точка прямой a и плоскости α» эквивалентно высказыванию «любая точка A не принадлежит прямой a или не принадлежит плоскости α» (или не принадлежит ни прямой a, ни плоскости α).

13. Геометрия строится аксиоматически, или дедуктивно. Это значит, что предложения геометрии выводятся логическим путем из некоторых исходных предложений, называемых аксиомами. (Слово «дедукция» происходит от латинского «*deductio*», означающего «выведение».)

Процесс логического вывода одних предложений из других называется доказательством.

Аксиомы геометрии представляют собой результаты простейшего опыта, их истинность подтверждается только практикой. Аксиомы логически недоказуемы, потому что они являются исходными, первоначальными предложениями данной теории, нет в этой теории предшествующих им предложений, из которых можно было бы их вывести логическим путем.

Таким образом, недоказуемость предложения, принятого в качестве аксиомы, не является свойством, присущим этому предложению независимо от того, принимается оно или нет в качестве аксиомы.

Это легко показать на следующем примере.

Известна следующая аксиома геометрии:

[1] Через любые две точки проходит одна и только одна прямая (под выражением «две точки» понимаем «две различные точки»).

Нетрудно заметить, что эта аксиома представляет собой конъюнкцию двух высказываний' высказывания (1_1) о существовании прямой, проходящей через любые две точки, и высказывания (1_2) об единственности такой прямой:

$$(A)(B)(\exists a)(A, B \in a), \tag{1_1}$$

где $(A, B \in a)$ — сокращенная запись конъюнкции $(A \in a) \wedge$ $\wedge (B \in a)$ («для любых двух точек A и B существует прямая a, проходящая через них»);

$$(A)(B)\overline{(\exists a)(\exists b)}\,[(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)]^1 \tag{1_2}$$

(«для любых двух точек A и B не существует двух прямых, проходящих через них»).

Покажем, что предложение 1_2 эквивалентно предложению: «две прямые не могут иметь более одной общей точки», т. е.

$$(a)(b)\overline{(\exists A)(\exists B)}\,[(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)].$$

Обозначим для краткости это предложение через X. Высказывание (1_2) равносильно высказыванию «для любых двух точек A, B и любых двух прямых a, b не имеет место конъюнкция $(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)$», или (что то же) «для любых двух прямых a, b и для любых двух точек A, B не имеет место конъюнкция $(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)$», т. е. $(a)\ (b)\ (A)\ (B)\ \overline{(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)}$, а это высказывание, согласно 12 (2), эквивалентно высказыванию «для любых двух прямых a, b не существует двух точек A, B таких, что $(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)$».

Мы получаем

$$(1_2) \leftrightarrow (a)(b)\overline{(\exists A)(\exists B)}[(A, B \in a) \wedge (A, B \in b)],$$

т. е. $\qquad (1_2) \leftrightarrow X$ или $((1_2) \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow (1_2))$.

Таким образом, если принять предложение (1_2) за аксиому, то из него логически следует предложение X, т. е. пред-

[1] Из истинности (1_1) и (1_2) следует, что a и b — различные прямые. Действительно, если a и b совпадают, то (1_2) — отрицание (1_1) и одно из этих высказываний ложно.

ложение X доказывается как теорема. Если же предложение X принять за аксиому, то предложение (1_2) становится доказуемым предложением, т. е. теоремой.

13.1. Работа по разъяснению понятия аксиомы и сущности аксиоматического метода не исчерпывается приведенным здесь примером. Эта работа должна вестись в течение длительного времени в старших классах. О ней более подробно говорится во второй части настоящей книги.

14. Каждое доказательство состоит из применения к аксиомам, определениям и ранее уже доказанным предложениям (теоремам) определенных правил логического вывода (умозаключений).[1]

Хотя при изучении геометрии доказывается очень много теорем, в этих доказательствах мы до сих пор интересовались лишь тем, из каких ранее известных предложений (аксиом, определений, теорем) выводится доказываемое предложение, но как оно из них выводится, на основе каких правил вывода построен процесс доказательства — не выясняли. Иначе говоря, мы не изучали логической структуры проводимых нами доказательств.

Восполним в некоторой степени этот пробел.

Доказательство вообще имеет сложную структуру, представляя собой определенную, строгую последовательность шагов. Каждый шаг доказательства состоит из применения некоторого правила вывода к аксиомам, определениям, ранее уже доказанным теоремам или предложениям, полученным в результате предшествующих шагов данного доказательства. Таким образом, каждый шаг доказательства в свою очередь представляет собой некоторое доказательство, состоящее из применения одного какого-нибудь правила вывода (из имеющегося запаса таких правил). Такое доказательство, имеющее простейшую логическую структуру, назовем *простым*; доказательство, не являющееся простым, назовем *сложным*, или *составным*.

Доказательства геометрических теорем вообще являются составными, т. е. состоят из определенной последовательности, или цепочки, простых доказательств.

Под логическим анализом доказательства надо понимать выяснение его логической структуры, т. е. представление доказательства в виде последовательности шагов или простых доказательств и выяснение сущности каждого шага:

а) какие предложения принимаются за истинные (посылки);

б) какое правило вывода применяется к посылкам;

---

[1] В дальнейшем будем говорить просто «правила вывода».

в) какое новое истинное предложение (заключение) получается в результате этого применения.

Схематически правило вывода, утверждающее, что «если высказывания X_1, X_2, ..., X_n (посылки) истинны, то истинно и высказывание Y (заключение)», записывается следующим образом:

$$\frac{X_1, X_2, \ldots, X_n}{Y}.$$

Самым существенным является то, что в правилах вывода указывается лишь вид посылок и заключения, их структура, и никогда не упоминается их содержание.

Ниже рассмотрим ряд простых доказательств с целью изучения некоторых широко применяемых правил вывода. На этих примерах наглядно видна независимость правил вывода от содержания рассуждений.

14.1. Пусть на плоскости две прямые a и b пересечены третьей прямой c и образуют с ней пару соответственных углов $\angle 1$ и $\angle 2$.

При изучении параллельных прямых мы доказали две взаимно обратные теоремы:

$$(\angle 1 = \angle 2) \rightarrow (a \parallel b), \qquad (1)$$

$$(a \parallel b) \rightarrow (\angle 1 = \angle 2). \qquad (2)$$

Из теоремы (1) легко выводится теорема, противоположная обратной:

$$\overline{a \parallel b} \rightarrow \overline{\angle 1 = \angle 2}. \qquad (3)$$

Аналогично из теоремы (2) выводится теорема:

$$\overline{\angle 1 = \angle 2} \rightarrow \overline{a \parallel b}. \qquad (4)$$

Правило вывода, которое здесь применяется, основано на эквивалентности прямой и противоположно-обратной, обратной и противоположной теорем.

Чтобы доказать, что это правило вывода допустимо и зависит не от содержания рассматриваемых высказываний, а лишь от их логической структуры, заменим высказывание «$a \| b$» произвольным высказыванием X, а высказывание «$\angle 1 = \angle 2$» — произвольным высказыванием Y, т. е. конкретные высказывания заменим переменными для высказываний.

Пусть $X \rightarrow Y$ — прямая теорема, тогда

$Y \rightarrow X$ — обратная теорема,

$\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ — противоположная теорема и

$\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ — противоположная обратной теорема.

Правило вывода, о котором идет здесь речь, состоит в том, что если истинно высказывание $X \to Y$, то утверждается, что истинно также высказывание $\overline{Y} \to \overline{X}$ и обратно. (Аналогично, если истинно высказывание $\overline{Y} \to \overline{X}$, то утверждается, что истинно и высказывание $X \to Y$ и обратно.)

Это правило называют правилом **контрапозиции**. Оно записывается схематически следующим образом:

$$\frac{X \to Y}{\overline{Y} \to \overline{X}}.$$

Обратное получается от применения этого же правила к высказыванию $\overline{Y} \to \overline{X}$:

$$\frac{\overline{Y} \to \overline{X}}{\overline{\overline{X}} \to \overline{\overline{Y}}} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{Y} \to \overline{X}}{X \to Y}.$$

Доказать допустимость этого правила вывода означает доказать истинность высказывания: «Если истинно $X \to Y$, то истинно $\overline{Y} \to \overline{X}$, т. е. истинность импликации $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$ при любых значениях истинности высказываний X и Y.

Это доказательство можно выполнить различными путями. Укажем некоторые из них.

а) Можно непосредственно доказать, исходя из определения импликации, что если истинно $X \to Y$, то истинно и $\overline{Y} \to \overline{X}$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что если $\overline{Y}$ истинно, $\overline{X}$ не может быть ложным. Действительно, если $\overline{Y}$ истинно, то Y ложно, и если при этом $\overline{X}$ был бы ложным, X был бы истинным и импликация $X \to Y$ была бы ложной.

б) Легко доказать эквивалентность $(X \to Y) \longleftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$. Действительно,

$$X \to Y \leftrightarrow \overline{X} \vee Y,$$

$$\overline{Y} \to \overline{X} \leftrightarrow \overline{\overline{Y}} \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee Y.$$

Доказанная эквивалентность означает, что истинна конъюнкция

$$[(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})] \wedge [(\overline{Y} \to \overline{X}) \to (X \to Y)],$$

а следовательно, и каждая из импликаций:

$$(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X}),$$

$$(\overline{Y} \to \overline{X}) \to (X \to Y).$$

в) Истинность импликации $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$ при любых значениях истинности высказываний X и Y, подтверждающая правило контрапозиции, легко может быть доказана с помощью соответствующей таблицы:

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to \overline{X}$	$(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	И	Л	Л	И	И

Приведем пример применения правила контрапозиции в доказательстве одной теоремы.

На плоскости даны две прямые: a и b.

Существует теорема: если всякая прямая c плоскости, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

$$(c)[(c \times a) \to (c \times b)] \to (a \parallel b),$$

где символом $(c \times a)$ обозначается высказывание «прямые c и a пересекаются».

Чтобы доказать эту теорему, достаточно, по правилу контрапозиции, доказать эквивалентную ей теорему:

$$\overline{a \parallel b} \to (c)[(c \times a) \to (c \times b)].$$

Преобразуем эту формулу:

$$\overline{a \parallel b} \to (\bar{c})[(c \times a) \to (c \times b)] = \overline{a \parallel b} \to (\exists c)\overline{(c \times a) \to (c \times b)} =$$

$$= \overline{a \parallel b} \to (\exists c)\overline{\overline{(c \times a)} \vee (c \times b)} = \overline{a \parallel b} \to (\exists c)[(c \times a) \wedge \overline{(c \times b)}].$$

Кроме того, так как прямые a и b лежат в одной плоскости, то если они не параллельны, они пересекаются. Мы получаем следующую эквивалентность:

$$(c)[(c \times a) \to (c \times b)] \to (a \parallel b) = (a \times b) \to (\exists c)[(c \times a) \wedge \overline{c \times b}],$$

т. е. сформулированная выше теорема эквивалентна следующей: если прямые a и b пересекаются, то существует прямая c такая, что она пересекает прямую a и не пересекает прямой b (или, наоборот, пересекает b, но не пересекает a).

Эта теорема очень просто доказывается. Достаточно взять на прямой a произвольную точку A, не лежащую на прямой b, и через нее на плоскости, определяемой прямыми a и b, провести прямую c, параллельную прямой b.

В этом примере мы осуществили процесс, аналогичный процессу решения уравнения. Решая уравнение, мы его последовательно преобразовываем, применяя правила преобразования, не нарушающие равносильность уравнений, пока не приходим к уравнению, корни которого легко найти. Так как последнее уравнение равносильно данному, то корни его будут корнями данного уравнения. Данную теорему мы выразили с помощью формулы. Затем мы последовательно переходили от этой формулы к другим, применяя правила преобразований, не нарушающие эквивалентность формул, пока не получили формулу, значение истинности которой легко определить. Это значение является значением истинности и исходной формулы, выражающей доказываемую теорему в той формулировке, в которой она предложена.

14.2. Правило контрапозиции допускает расширения. Возьмем, например, истинное высказывание

$$(A \in a) \wedge (a \subset \alpha) \to (A \in \alpha).$$

Из него следуют высказывания:

$$(A \in a) \wedge (\overline{A \in \alpha}) \to (\overline{a \subset \alpha}) \quad \text{и}$$

$$(\overline{A \in \alpha}) \wedge (a \subset \alpha) \to (\overline{A \in a}).$$

В общем виде схема примененного здесь правила вывода запишется так:

$$\frac{X \wedge Y \to Z}{X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y},\ Z \wedge Y \to X}.$$

Чтобы показать допустимость этого правила вывода, называемого правилом расширенной контрапозиции, достаточно доказать истинность импликаций:

$$[(X \wedge Y) \to Z] \to [(X \wedge \overline{Z}) \to \overline{Y}], \tag{1}$$

$$[(X \wedge Y) \to Z] \to [(\overline{Z} \wedge Y) \to \overline{X}]. \tag{2}$$

Очевидно, достаточно доказать истинность одной из этих импликаций, ибо, если, например, докажем истинность (1), заменим в ней букву X буквой Y и обратно и применим свойство коммутативности конъюнкции (непосредственно следующее из определения конъюнкции), получим, что и импликация (2) истинна. (Можно, разумеется, и непосредственно доказать истинность импликации (2), подтверждая этим самым правомерность примененного здесь правила подстановки. Это правило целесообразно рассмотреть в связи с аналогичным правилом обыкновенной алгебры. Гл. 6.)

Истинность импликации (1) следует из эквивалентности

$$[(X \wedge Y) \to Z] = [(X \wedge \overline{Z}) \to \overline{Y}],$$

которая легко доказывается.

Действительно,

$$[(X \wedge Y) \to Z] = (\overline{X \wedge Y} \vee Z) = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z);$$

$$[(X \wedge \overline{Z}) \to \overline{Y}] = (\overline{X \wedge \overline{Z}} \vee \overline{Y}) = (\overline{X} \vee \overline{\overline{Z}} \vee \overline{Y}) = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).$$

Следовательно,

$$[(X \wedge Y) \to Z] = [(X \wedge \overline{Z}) \to \overline{Y}].$$

(Вопрос о правильном употреблении скобок будет рассмотрен в связи с аналогичным вопросом в алгебре. Гл. 6. На данном этапе можно условиться не заключать в скобки сложные высказывания, стоящие под знаком отрицания или соединенные знаком эквивалентности.)

Правило расширенной контрапозиции имеет вообще более общий вид, чем тот, который рассмотрен выше. У нас посылка $(X \wedge) Y \to Z$ имеет в основании конъюнкцию из двух высказываний. В самом общем случае здесь может быть конъюнкция из любого числа высказываний:

$$\frac{(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots \wedge X_n) \to Y}{(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots \wedge X_{k-1} \wedge X_{k\text{н}} \wedge \ldots \wedge X_n \wedge \overline{Y}) \to \overline{X}_k}.$$

14.3. Произведем логический анализ следующего рассуждения: «Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; данный многоугольник — правильный; следовательно, в него можно вписать окружность». В этом рассуждении применено некоторое правило вывода, о чем свидетельствует слово «следовательно», отделяющее посылки от заключения.

Для выяснения сущности примененного в этом рассуждении правила вывода отвлечемся от содержания фигурирующих в нем элементарных высказываний.

Заменим элементарное высказывание «данный многоугольник — правильный» переменной X, а высказывание «в него (в данный многоугольник) можно вписать окружность» — переменной Y. Тогда исследуемое рассуждение запишется схематически следующим образом:

$$\frac{X \to Y,\ X}{Y},$$

т. е. из посылок $X \to Y$ и X выведено заключение Y.

Это правило вывода называется правилом заключения, или правилом отделения (с помощью посылки X из импликации $X \to Y$ «отделяется» Y). (В традиционной логике это правило называется утверждающим модусом условно-категорического силлогизма — Modus ponens.)

Правило заключения непосредственно следует из определения импликации. Действительно, если истинна импликация $X \to Y$ и истинно основание X, т. е. имеет место И $\to Y =$ И, то Y должно быть истинным, иначе И $\to$ Л $=$ Л.

14.4. Рассмотрим сейчас следующее рассуждение: «Если данный многоугольник — правильный, то в него можно вписать окружность; в данный многоугольник нельзя вписать окружность; следовательно, данный многоугольник не есть правильный».

Используя введенные выше (14.3) переменные, получим следующую схему этого рассуждения:

$$\frac{X \to Y,\ \overline{Y}}{\overline{X}}.$$

В традиционной логике это правило вывода называется отрицательным модусом условно-категорического силлогизма — Modus tollens.

Нетрудно доказать законность такого вывода. Действительно, так как $X \to Y =$ И и $\overline{Y} =$ И, то $Y =$ Л и, чтобы имело место $X \to$ Л $=$ И, должно быть $X =$ Л, а следовательно, $\overline{X} =$ И.

Это правило вывода может быть сведено к рассмотренным выше правилам заключения и контрапозиции.

$$\frac{X \to Y}{\overline{Y} \to \overline{X}} \text{ (правило контрапозиции),} \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{Y} \to \overline{X},\ \overline{Y}}{\overline{X}} \text{ (правило заключения).} \qquad (2)$$

Таким образом, последовательное применение этих двух правил дает нам новое правило:

$$\frac{X \to Y,\ \overline{Y}}{\overline{X}}.$$

Если не воспользоваться этим новым правилом, то исследуемое рассуждение уже представляет собой сложное доказательство, состоящее из двух шагов.

Рассмотренные выше два правила вывода позволяют в истинной импликации из истинности основания сделать вывод об истинности следствия и из ложности следствия сделать вывод о ложности основания. Эти правила, как мы видели, непосредственно следуют из определения импликации.

В связи с определением импликации (10) мы также выяснили, что из ложности основания нельзя сделать вывод о ложности следствия и из истинности следствия нельзя сделать вывод об истинности основания, т. е. рассуждения, проведенные по следующим схемам:

$$\frac{X \to Y,\ \overline{X}}{\overline{Y}} \quad \text{и} \quad \frac{X \to Y,\ Y}{X},$$

не являются верными.

Нетрудно показать, что импликации

$$[(X \to Y) \wedge \overline{X}] \to \overline{Y} \text{ и } (X \to Y) \wedge Y \to X$$

не являются истинными при всех значениях истинности X и Y и, следовательно, такие правила вывода недопустимы.

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$(X \to Y) \wedge \overline{X}$	$\overline{Y}$	$[(X \to Y) \wedge \overline{X}] \to \overline{Y}$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	Л	Л

Дальше составление таблицы можно не продолжать. Достаточно найти один набор значений истинности X и Y, при котором рассматриваемая импликация ложна, чтобы сделать вывод, что она не является всегда истинной.

14.5. Произведем логический анализ следующего рассуждения: «если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны; если две стороны треугольника равны, то два угла его равны, следовательно, если треугольник равнобедренный, то два угла его равны». В этом рассуждении из двух посылок выведено заключение.

Для выяснения допустимости примененного в этом рассуждении правила вывода заменим фигурирующие в нем конкретные элементарные высказывания переменными. Заменим высказывание «треугольник — равнобедренный» буквой X, высказывание «две стороны треугольника равны» буквой Y, а высказывание «два угла треугольника равны» буквой Z. Тогда первая посылка запишется в виде импликации $X \to Y$, вторая — в виде $Y \to Z$, а заключение — $X \to Z$.

Нам предстоит обосновать следующее правило вывода:

$$\frac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z},$$

называемое правилом силлогизма и находящее широкое применение в математических доказательствах.

Очевидно, что для обоснования этого правила достаточно доказать истинность импликации

$$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (X \to Z)$$

(при любых комбинациях значений истинности переменных X, Y, Z).

Действительно, если эта импликация истинна, то при условии истинности посылок $X \to Y$ и $Y \to Z$, а следовательно, и их конъюнкции, составляющей основание импликации, будет истинно и следствие $X \to Z$.

Доказательство истинности данной импликации при любых комбинациях значений истинности X, Y и Z можно провести с помощью соответствующей таблицы. (В гл. 7 будет дано доказательство с помощью преобразования формулы, выражающей эту импликацию.)

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \to Z$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$	$X \to Z$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (X \to Z)$
Л	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	Л	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И	И	И	И

Рассуждение, имеющее логическую структуру правила силлогизма, но выраженное в иной форме, может быть приведено к форме, соответствующей этой структуре.

Например, рассуждение «ромб — параллелограмм, а в параллелограмме диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, в ромбе диагонали делятся точкой пересечения пополам» можно выразить в следующей форме: «если четырехугольник — ромб, то он параллелограмм, если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, если четырехугольник — ромб, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам», в которой легко усматривается схема правила силлогизма.

Существует, однако, много разновидностей силлогистических форм рассуждений (в которых из двух посылок выводится заключение), не сводимых к рассмотренному выше правилу силлогизма. Здесь мы не рассматриваем правила вывода, лежащие в основе этих рассуждений.

14.6. В импликации $X \to Y$ мы говорим, что основание X выражает д о с т а т о ч н о е условие для того, чтобы имело место Y, а Y — н е о б х о д и м о е условие для того, чтобы имело место X.

Достаточность X ясна и непосредственно объясняется самим толкованием импликации как высказывания о следовании: если импликация $X \to Y$ истинна, то истинность X д о с т а т о ч н а для истинности Y (иначе, если при X истинном Y был бы ложным, то и вся импликация $X \to Y$ была бы ложной).

Выясним, как надо понимать необходимость. Одной из форм выражения необходимости Y для X является, как было указано выше, истинная импликация $X \to Y$, т. е. следование Y из X. Можно найти для выражения необходимости другие, более наглядные формы. Например, используя эквивалентность $X \to Y = \overline{Y} \to \overline{X}$, получаем следующую формулировку необходимости: «Y необходимо для X» означает «если нет Y, то нет и X».

Преобразуя импликацию $\overline{Y} \to \overline{X}$:

$$\overline{Y} \to \overline{X} = \overline{\overline{Y}} \vee \overline{X} = \overline{\overline{Y} \wedge X},$$

получаем еще одну трактовку необходимости: «Y необходимо для X» означает «не может быть X без Y».

Мы доказали (14.1) теорему

$$(c)\,[(c \times a) \to (c \times b)] \to (a \parallel b).$$

Можем сказать, что высказывание $(c)[(c \times a) \to (c \times b)]$ («всякая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b») выражает достаточное условие параллельности прямых a и b. С другой стороны, высказывание $a \parallel b$ выражает условие, необходимое для того, чтобы имело место свойство, выраженное высказыванием $(c)[(c \times a) \to (c \times b)]$, так как $\overline{a \parallel b} \to \overline{(c)}[(c \times a) \to (c \times b)]$, т. е. если прямые a и b непараллельны, не имеет место это свойство.

Возникает вопрос: является ли условие $(c)[(c \times a) \to (c \times b)]$ также и необходимым условием параллельности прямых a и b?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть обратную теорему:

$$(a \parallel b) \to (c)[(c \times a) \to (c \times b)].$$

Эта теорема также верна, и, следовательно, указанное выше достаточное условие параллельности прямых a и b является также и необходимым. Поэтому это условие называют также п р и з н а к о м параллельности прямых. (Очевидно, именно такое условие — необходимое и достаточное — целесообразно называть признаком.)

Объединив две взаимно обратные теоремы, выражающие соответственно достаточность и необходимость признака параллельности двух прямых одной плоскости, в одну, можем эту теорему сформулировать следующим образом: «Для того чтобы две прямые одной плоскости были параллельны, **необходимо и достаточно,** чтобы всякая прямая этой плоскости, пересекающая одну из них, пересекала и другую», или же «Две прямые одной плоскости параллельны, **если и только если (тогда и только тогда, когда)** всякая прямая этой плоскости, пересекающая одну из них, пересекает и другую». Как видно, выражения «необходимо и достаточно», «если и только если», «тогда и только тогда, когда» — синонимы.

При изучении геометрии нам встречаются многие условия, при которых имеют место различные геометрические свойства и отношения. Некоторые из этих условий являются достаточными, но не являются необходимыми, другие — необходимыми, но недостаточными, третьи — необходимыми и достаточными (признаки).

Приведем примеры условий, относящихся к каждой из этих категорий:

а) Правильность многоугольника является достаточным, но не необходимым условием для того, чтобы около него можно было описать окружность.

Действительно, это условие достаточно, так как если многоугольник правильный, то около него можно описать окружность. Это условие не является необходимым, так как теорема «если многоугольник неправильный, то около него нельзя описать окружность» неверна, ибо существуют и неправильные многоугольники, около которых можно описать окружность.

б) Пропорциональность сторон является необходимым, но недостаточным условием подобия двух четырехугольников.

Действительно, это условие необходимо, так как если четырехугольники подобны, то соответственные стороны пропорциональны, или же, что равносильно этому, если соответственные стороны непропорциональны, четырехугольники неподобны.

Это условие недостаточно, так как теорема «всякие четырехугольники, стороны которых соответственно пропорциональны, подобны» неверна, ибо существуют четырехугольники, у которых стороны соответственно пропорциональны, но они не подобны, например квадрат и ромб (непрямоугольный).

в) Условие предыдущего примера (*б*), пропорциональность сторон, является необходимым и достаточным условием (признаком) подобия треугольников.

Необходимость этого условия обосновывается так же, как и в предыдущем примере.

Достаточность этого условия доказывается теоремой: «Если стороны одного треугольника соответственно пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны», известной под названием «третьего признака подобия треугольников».

(Необходимо отметить, что в установившейся практике преподавания доказывается только достаточность признаков подобия треугольников. Однако все эти признаки являются необходимыми и достаточными условиями, их необходимость непосредственно следует из определения подобия треугольников.)

Нетрудно наметить общую схему доказательства:

а) достаточности, но не необходимости;

б) необходимости, но недостаточности;

в) необходимости и достаточности некоторого условия.

Известно, что X — достаточное условие для Y, если истинна импликация $X \rightarrow Y$; X — необходимое условие для Y, если истинна импликация $Y \rightarrow X$, или же эквивалентная ей импликация $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$.

Следовательно:

а) X — достаточное, но не необходимое условие для Y, если истинна конъюнкция $(X \rightarrow Y) \wedge \overline{Y \rightarrow X}$ или эквивалентная ей конъюнкция $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \wedge \overline{X})$.

б) X — необходимое, но недостаточное условие для Y, если истинна конъюнкция $(Y \rightarrow X) \wedge \overline{X \rightarrow Y}$ или $(Y \rightarrow X) \wedge \wedge X \wedge \overline{Y}$.

в) X — необходимое и достаточное условие (признак) для Y, если истинна конъюнкция $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ или $(X \rightarrow \rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \rightarrow \overline{Y})$.

* * *

Введенный в настоящей главе логический аппарат может весьма эффективно применяться в изложении начал стереометрии (ч. II, гл. 3), способствуя лучшему усвоению понятий, предложений и их доказательств, повышению уровня строгости преподавания. Этот аппарат может получить и дальнейшее развитие в процессе изучения стереометрии. Например, при анализе некоторых доказательств могут быть разъяснены новые правила вывода.

Глава 6. Изучение и применение логических операций и правил вывода в курсе алгебры

Логические знания, приобретаемые учащимися в курсе геометрии в результате работы, описанной в гл. 5, находят применение и дальнейшее развитие в курсе алгебры.

В настоящей главе показано, как эти знания применяются к уточнению понятий школьной алгебры и какое в связи с этим применением они получают дальнейшее развитие.

Мы рассмотрим основные понятия учений о тождественных преобразованиях, об уравнениях и неравенствах.

01. Аналогично тому, как в обычных языках из букв, взятых из данного алфавита, составляются слова, представляющие собой основные языковые образования, в алгебре из букв a, $в$, c, ..., x, y, ... знаков операций «$+$», «$\cdot$», .:. и скобок «(   )», образующих своеобразный алфавит алгебры, составляются алгебраические выражения, основные образования алгебры, представляющие собой своеобразные слова этого «языка».

Подобно тому как не всякая конечная последовательность букв русского алфавита образует слово русского языка, не всякая конечная последовательность символов из алфавита алгебры образует алгебраическое выражение.

Понятие алгебраического выражения может быть уточнено с помощью следующего определения:

[*а*] Буквы a, b, c, ..., x, y, ... — суть алгебраические выражения.

[*б*] Если A и B — алгебраические выражения, то и $(A+B)$, $(A-B)$, $(A \cdot B)$, $(A:B)$ (или $\frac{A}{B}$) также алгебраические выражения.

[*в*] Других, кроме перечисленных в [*а*] и [*б*], алгебраических выражений нет. Заглавные буквы A, B, ... не принадлежат алфавиту алгебры и применяются здесь лишь для сокращенного обозначения более сложных образований из букв этого алфавита. (Вообще и символы некоторых операций, числовые коэффициенты, показатели и радикалы не принадлежат алфавиту алгебры и являются лишь средствами для сокращенной записи определенных конструкций из символов этого алфавита.)

В приведенном выше определении содержится схема конструкции алгебраических выражений: указаны исходные алгебраические выражения [*а*] и правила, посредством которых из данных выражений можно получить новые [*б*]. (Такое определение называется и н д у к т и в н ы м.)

Исходя из этого определения, нетрудно установить для любой заданной конечной последовательности символов, составляет ли она или нет алгебраическое выражение.

Например, последовательность символов

$$((a \cdot (b + c)) - (b : c)) \tag{1}$$

образует алгебраическое выражение, а последовательности

$$(a +) \tag{2}$$

и

$$(a \cdot (b + c) \tag{3}$$

не образуют алгебраических выражений.

Действительно, так как a, b, c — алгебраические выражения [а], то $(b + c)$ и $(b : c)$ — алгебраические выражения [б]. Следовательно, и $(a \cdot (b + c))$ — алгебраическое выражение [б], а потому [б] и $((a \cdot (b + c)) - (b : c))$ (1) также алгебраическое выражение.

Так как a алгебраическое выражение, то $(a +)$ не есть алгебраическое выражение, ибо среди алгебраических выражений, перечисленных в пункте [б] определения, нет такого, а других алгебраических выражений нет [в].

Так как b, c — алгебраические выражения [а], то $(b + c)$ — алгебраическое выражение [б]; так как a и $b + c)$ — алгебраические выражения, то $(a \cdot (b + c)$ не есть алгебраическое выражение (недостает одной правой скобки).

Как видно, приведенное определение алгебраического выражения содержит в себе правила правописания слов алгебраического языка и играет, таким образом, роль специфической «орфографии» этого языка.

Ввиду того, что при записи более сложных алгебраических выражений в соответствии с данным определением приходится применять много скобок, принимается ряд соглашений для упрощения правописания алгебраических выражений. Эти соглашения состоят в следующем:

1) Опускаются внешние скобки, т. е. те скобки, которые заключают в себе все остальные символы выражения.

В соответствии с этим соглашением выражение (1) записывается так:

$$(a \cdot (b + c)) - (b : c).$$

2) Считают, что знаки умножения и деления связывают сильнее, чем знаки сложения и вычитания, т. е. операции умножения и деления выполняются раньше операций сложения и вычитания в данном выражении, если только скобками не определен иной порядок выполнения операций.

В соответствии с этим соглашением приведенное выше выражение (1) записывается так:

$$a \cdot (b + c) - b : c.$$

Обычно еще опускается знак умножения и, если в выражении применяется несколько пар скобок, расположенных одна внутри другой, применяют скобки различной формы (круглые, квадратные, фигурные) для более наглядного различения областей распространения различных пар скобок. Например, выражение

$$a \cdot ((a \cdot (b + c) - b) \cdot c - a \cdot b)\ .$$

записывается (в частности, в школьной практике) так:

$$a\ \{[a(b + c) - b]\ c - ab\}.$$

01.1. В учебно-методической литературе и в основанной на ней практике преподавания не уделяется достаточное внимание определению, правописанию и чтению алгебраических выражений. Содержащаяся в приведенном выше определении схема конструкции алгебраических выражений нашла отражение лишь в книге В. Л. Гончарова «Начальная алгебра».[1]

Необходимо отметить, что разъяснение этой схемы учащимся не представляет затруднений и помогает им распознавать правильно составленные алгебраические выражения и порядок операций в них.

Незнание правил правописания алгебраических выражений приводит к тому, что учащиеся часто не ставят скобки там, где они нужны, и ставят их там, где не нужны; затрудняются прочитать алгебраическое выражение и записать в символах прочитанное выражение.

Необходимо разъяснить учащимся на конкретных примерах правило чтения алгебраических выражений.

Возьмем в качестве примера выражение

$$(a - b)^2(a^3 + b^3).$$

Произведем анализ порядка операций, определяющего структуру этого выражения. Запишем по порядку результаты этих операций: 1) разность чисел a и b; 2) квадрат; 3) кубы чисел a и b; 4) сумма; 5) произведение.

Для составления словесной формулировки данного алгебраического выражения достаточно указать названия результатов выполненных операций в обратном порядке. Получаем:

---

[1] В. Л. Гончаров. Начальная алгебра. М., 1960, стр. 16.

«произведение суммы кубов чисел a и b на квадрат их разности». (Эта формулировка появляется лишь после соответствующей стилистической обработки формулировки: «произведение суммы кубов чисел a и b на квадрат разности чисел a и b».) Если сначала выполнить операции во второй паре скобок, мы придем к следующей, равносильной первой, формулировке: «произведение квадрата разности чисел a и b на сумму их кубов».

02. Мы уже знакомы с некоторыми логическими операциями, выполняемыми над высказываниями. Часть логики, имеющая своим предметом изучение этих и других операций над высказываниями, называется л о г и к о й, или а л г е б р о й в ы с к а з ы в а н и й.[1]

Эта необыкновенная алгебра во многом похожа на обыкновенную, но во многом отличается от нее, в чем мы убедимся в дальнейшем. Здесь мы рассматриваем лишь одно понятие из алгебры высказываний, аналогичное понятию алгебраического выражения из обыкновенной алгебры.

В алгебре высказываний, как и в обыкновенной алгебре, имеется свой алфавит, состоящий из букв A, B, C, ..., X, Y, ..., обозначающих элементарные высказывания, знаков операций «—», «$\vee$», «$\wedge$», $\rightarrow$ и скобок «( )». Сложные высказывания выражаются с помощью конечных последовательностей символов этого алфавита, называемых ф о р м у л а м и а л г е б р ы в ы с к а з ы в а н и й. Однако не всякая конечная последовательность символов этого алфавита образует формулу. Дадим определение формулы алгебры высказываний аналогичное приведенному выше (01) определению алгебраического выражения обыкновенной алгебры, т. е. индуктивное определение, состоящее из трех частей: в первой части указаны исходные формулы, во второй — правила, посредством которых из данных формул образуются новые, в третьей указывается, что первые две части исчерпывают всевозможные формулы.

Определение: (*а*) Элементарные высказывания

$$A,\ B,\ C,\ ...,\ X,\ Y...$$

суть формулы;

(*б*) Если f и φ—формулы, то и $\overline{f}$ (или $\overline{\varphi}$), $(f \vee \varphi)$, $(f \wedge \varphi)$, $(f \rightarrow \varphi)$ тоже формулы.

(*в*) Других формул, кроме перечисленных в (*а*) и (*б*), нет.

Исходя из этого определения, нетрудно установить для любой заданной конечной последовательности символов из

[1] В дальнейшем будем пользоваться терминами «логика высказываний» и «алгебра высказываний» как синонимами.

алфавита логики высказываний, образует ли она или нет формулу на языке этой логики.

Возьмем для примера следующую последовательность из букв, знаков операций и скобок:

$$(((A \wedge \overline{B}) \vee C) \to (\overline{A} \wedge B))$$

и докажем, что она представляет собой формулу.

Действительно, так как A и B — формулы (*а*), то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также формулы (*б*), а, следовательно, $(A \wedge \overline{B})$ и $(\overline{A} \wedge B)$ — формулы (*б*); тогда и $((A \wedge \overline{B}) \vee C)$ — формула (*б*) и, наконец, $(((A \wedge \overline{B}) \vee C \to (\overline{A} \wedge B))$ — формула (*б*).

Такие же последовательности, как, например, $(A \wedge)$ или $((C \vee A \to (\overline{B} \vee C))$, не являются формулами.

Действительно, в (*б*) нет случая, когда правая скобка следует за знаком операции, как в $(A \wedge)$, а других формул нет (*в*). Во втором случае недостает одной правой скобки. Действительно, C и A формулы (*а*), но $(C \vee A$ не является формулой, следовательно, и все выражение

$$((C \vee A \to (\overline{B} \vee C))$$

неправильно сконструировано, т. е. не образует формулы.

(Необходимо обратить внимание учащихся на то, что в правильно сконструированной формуле, согласно определению (*б*), должно быть столько же правых скобок, сколько левых. Такое же «синтаксическое» правило имеет место и в обыкновенной алгебре.)

Для упрощения правописания формул алгебры высказываний принимаются следующие соглашения:

1) Опускаются внешние скобки, т. е. те, которые включают внутри себя все остальные символы, образующие формулу.

В соответствии с этим соглашением формулу

$$(((A \wedge \overline{B}) \vee C) \to (\overline{A} \wedge B))$$

следует писать так:

$$((A \wedge \overline{B}) \vee C) \to (\overline{A} \wedge B).$$

2) Считается, что знак «$\wedge$» связывает сильнее, чем знаки «$\vee$» и «$\to$», а знак «$\vee$» — сильнее знака «$\to$».

В соответствии с этим соглашением приведенную выше формулу будем писать так:

$$A \wedge \overline{B} \vee C \to \overline{A} \wedge B.$$

В дальнейшем в записях формул алгебры высказываний будем придерживаться этих соглашений, так же как в обыкновенной алгебре мы придерживаемся аналогичных соглашений, касающихся правописания алгебраических выражений [01].

Правило чтения алгебраических выражений из обыкновенной алгебры [01.1] применимо и для чтения формул алгебры высказываний. Например, формула

$$A \wedge (B \vee \overline{C}) \tag{1}$$

представляет собой конъюнкцию высказывания A и дизъюнкцию B с отрицанием C, формула

$$A \wedge B \vee \overline{C} \tag{2}$$

представляет собой дизъюнкцию конъюнкции A и B с отрицанием C.

Интересно отметить, что хотя формулы (1) и (2) состоят из одних и тех же букв, переменных для высказываний, и из одних и тех же знаков операций, различная расстановка скобок определяет в них различный порядок операций. Эти формулы выражают сложные высказывания различной логической структуры, причем неэквивалентные между собой. Например, при $A = Л$, $B = И$ и $C = Л$ формула (1) выражает ложное высказывание, а формула (2) — истинное.

Запись сложных высказываний в виде формул алгебры высказываний имеет важное значение для уточнения логической структуры высказываний, формулируемых на естественном языке.

Бывают случаи, когда словесное выражение на естественном языке не определяет однозначно логическую структуру высказывания.

Возьмем в качестве примера высказывание: «Всякое четное число делится на 3 и делится на 2 или не делится на 6».

Обозначим элементарное высказывание «всякое четное число делится на 3» буквой A, высказывание «(это число) делится на 2» — буквой B, а высказывание «(это число) делится на 6» — буквой C. Тогда наше высказывание выразится формулой

$$A \wedge (B \vee \overline{C}). \tag{1}$$

Это высказывание, исходя из его конкретного содержания, ложно. Чтобы убедиться в этом, так как оно относится ко всем четным числам, достаточно найти хотя бы одно четное число, для которого оно ложно. Например, для числа 4 высказывание A ложно, а следовательно, и вся конъюнкция (1) ложна.

Однако возможно, что в приведенном выше сложном высказывании имеется в виду другая связь элементарных высказываний, а именно:

$$A \wedge B \vee \overline{C}. \qquad (2)$$

В этом случае получается истинное высказывание. Действительно, если возьмем четное число, делящееся на 3, например 12, то конъюнкция $A \wedge B$ истинна, а следовательно, вся дизъюнкция истинна. Если же взять четное число, не делящееся на 3, то $\overline{C}$ истинно и, следовательно, дизъюнкция снова истинна.

Как видно, имеющийся у нас логический аппарат алгебры высказываний позволяет нам уточнить логическую структуру выражаемых словесно высказываний.

03. Мы рассмотрели [01] понятие алгебраического выражения лишь с формальной точки зрения, как конструкцию из букв, знаков операций и скобок, составленную по определенным правилам. Но алгебраическое выражение можно трактовать и с функциональной точки зрения, как выражающее некоторую функцию от входящих в него букв.

Наряду с изучением конструкции алгебраических выражений с самого начала курса алгебры необходимо выяснить их функциональную сущность. Этой цели служат, в частности, упражнения на определение числового значения алгебраического выражения при различных системах числовых значений входящих в него букв.

В результате решения таких упражнений приходим к следующим выводам:

а) всякое алгебраическое выражение может принимать различные числовые значения (является переменной);

б) числовые значения алгебраического выражения зависят от числовых значений входящих в него букв (алгебраическое выражение выражает некоторую функцию);

в) не при всяких системах числовых значений букв алгебраическое выражение имеет числовое значение (некоторые системы значений букв не являются допустимыми).

В дальнейшем, после усвоения понятия функции, учащиеся должны видеть в каждом алгебраическом выражении задание какой-то функции. Применяя функциональную символику, мы можем писать

$$\frac{a(b+c)}{a-b} = f(a, b, c).$$

Знаку равенства придается здесь следующий смысл: выражение $\frac{a(b+c)}{a-b}$ определяет некоторую функцию f от аргументов a, b, c так, что каждому набору (или каждой системе) их значений (a_0, b_0, c_0), взятых из области определения, соответствует определенное значение $f(a_0, b_0, c_0)$ этой функции.

04. Каждая формула алгебры высказываний определяет некоторую функцию от переменных для высказываний, входящих в эту формулу. Если вместо переменных подставить конкретные высказывания, то и функция, определяемая данной формулой, обратится в высказывание, истинное или ложное в зависимости от значений истинности подставленных высказываний, причем значение функции зависит только от значений истинности высказываний — аргументов и не зависит от их содержания.

Здесь имеет место сходство с функциональной точкой зрения на алгебраическое выражение в обыкновенной алгебре. Так же как числовая функция от числовых аргументов принимает различные числовые значения в зависимости от числовых значений аргументов, функция, определяемая формулой алгебры высказываний, принимает различные значения истинности в зависимости от значений истинности высказываний — аргументов. Так как здесь и аргументы и функция представляют собой переменные, могущие принимать два значения: (И — истинное высказывание или Л — ложное высказывание), то такие функции в отличие от знакомых нам числовых функций называют функциями-высказываниями или логическими функциями.

Так же как в обыкновенной алгебре термин «значение» применяется как сокращение термина «числовое значение», в алгебре высказываний термин «значение» применяется как сокращение термина «значение истинности».

Отмеченная аналогия позволяет применять в алгебре высказываний функциональную символику и писать, например, что

$$A \wedge (B \vee C) \vee \bar{A} \wedge \bar{B} = f(A, B, C).$$

Знаку равенства придается здесь следующий смысл: формула

$$A \wedge (B \vee C) \vee \bar{A} \wedge \bar{B}$$

определяет некоторую логическую функцию от аргументов A, B, C так, что каждому набору (α_1, α_2, α_3) значений этих переменных, где α_i = И или Л (здесь знак «=» применяется в смысле совпадения), соответствует определенное значение $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ этой функции, которое тоже может быть только И или Л.

Так как всякая формула содержит конечное число переменных, а каждая из них может принимать лишь два значения (И или Л), то число всевозможных наборов значений переменных — аргументов всегда конечно, и логическая функция в отличие от обычных числовых функций, аргументы которых могут принимать бесконечное множество значений, может быть полностью заданной с помощью таблицы, в которой даны ее значения, соответствующие всевозможным наборам значений аргументов. В частности, логические операции, которые мы знаем, определяют логические функции ($\overline{X} = f_1(X)$, $X \vee Y = f_2(X, Y)$, $X \wedge Y = f_3(X, Y)$, $X \to Y = f_4(X, Y)$), которые мы задали соответствующими таблицами.

Если логическая функция задана формулой, то нетрудно по этой формуле составить таблицу значений функции (в дальнейшем мы научимся также по заданной таблице значений логической функции составлять формулу, выражающую эту функцию).

Поясним на примере приведенной выше функции

$$f(A, B, C) = A \wedge (B \vee C) \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$$

метод составления соответствующей таблицы, называемой таблицей истинности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$A \wedge (B \vee C) \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	И	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И	Л	Л	Л	И

В первых слева трех столбцах выписываем всевозможные наборы значений трех переменных A, B, C (их всего 8). В четвертом столбце выписываем значения дизъюнкции $B \vee C$, соответствующие наборам значений переменных B и C в столбцах 2 и 3 на основании определения дизъюнкции. В пятом столбце выписываем значения конъюнкции $A \wedge (B \vee C)$, соответствующие значениям A и $B \vee C$ в столбцах 1 и 4 по определению конъюнкции. В столбцах 6 и 7 выписываем значения отрицаний высказываний A и B, соответствующие значениям этих высказываний в столбцах 1 и 2, а в столбце 8 — значения конъюнкции $\overline{A} \wedge \overline{B}$, соответствующие значениям $\overline{A}$ и $\overline{B}$ в столбцах 6 и 7. Наконец, в девятом столбце определяем значения нашей функции как дизъюнкции сложных высказываний, значения которых даны в столбцах 5 и 8.

04.1. Понятие логической функции, как и понятие геометрического преобразования, представляет собой интересный для учащихся пример нечисловой функции от нечислового аргумента и поэтому способствует расширению понятия учащихся о функции и их лучшему пониманию общей идеи, заложенной в этом понятии.

05. Как и понятие «алгебраическое выражение», понятие «тождественные алгебраические выражения» допускает две трактовки: формальную и функциональную, которые должны находить отражение в школьном обучении.

С формальной точки зрения два алгебраических выражения считаются тождественными, если применением свойств операций к одному из них можно получить другое. С этой точки зрения выражение $a(b+c)$ тождественно выражению $ba+ca$, так как одно из этих выражений может быть получено из другого с помощью применения дистрибутивного свойства умножения относительно сложения и коммутативного свойства умножения.

С функциональной точки зрения два алгебраических выражения считаются тождественными, если они принимают равные числовые значения при любых (одинаковых) системах допустимых числовых значений букв.

С этой точки зрения выражения $a(b+c)$ и $ba+ca$ тождественны, так как при подстановке в них любых одинаковых троек чисел вместо букв a, b, c соответственно они принимают равные числовые значения.

Тождество двух алгебраических выражений обозначается обычным знаком равенства. Но имеется принципиальное различие между знаком равенства, обозначающим совпадение двух элементов, например $3+4=7$, и знаком равенства, обозначающим тождество $A=B$ двух алгебраических выражений A и B.

В первом случае имеем просто истинное высказывание, во втором — более сложную логическую конструкцию, по-разному понимаемую с формальной и функциональной точек зрения. С формальной точки зрения знак «=» в тождестве $A=B$ означает, что существует конечная последовательность шагов (д е д у к т и в н а я ц е п о ч к а), позволяющая переходить от выражения A к выражению B, причем каждый из этих шагов состоит в применении какого-нибудь свойства операций.

Например, в тождестве $a(b+c)=ba+ca$ дедуктивная цепочка состоит из двух шагов. Первый состоит в применении к выражению $a(b+c)$ дистрибутивного свойства умножения относительно сложения, т. е. в замене этого выражения выражением $ab + ac$, второй — в применении к каждому из произведений ab и ac в выражении $ab + ac$ коммутативного свойства умножения, т. е. замене этого выражения выражением $ba + ca$.

С функциональной точки зрения знак «=» в тождестве

$$F_1(a, b, \dots, c) = F_2(a, b, \dots, c)$$

означает, что истинно высказывание

$$(a, b, \dots, c)[F_1(a, b, \dots, c) = F_2(a, b, \dots, c)],$$

где символ «$(a, b, \dots, c)$» — квантор общности: «для всякого набора допустимых значений букв $a, b, \dots, c$», т. е. что истинны все числовые равенства:

$$F_1(a_i, b_i, \dots, c_i) = F_2(a_i, b_i, \dots, c_i),$$

где $a_i, b_i, \dots, c_i$ — произвольный набор допустимых значений букв, а следовательно, истинна и их конъюнкция.

Таким образом, с функциональной точки зрения знак равенства в тождестве

$$F_1(a, b, \dots, c) = F_2(a, b, \dots, c)$$

обозначает не одно, а множество равенств типа «3=3», соединенных конъюнктивно.

Если это множество конечно, т. е. существует конечное множество наборов значений букв (как, например, в любой формуле алгебры высказываний), то возможно доказательство тождества путем простой проверки истинности всех равенств. Если же это множество бесконечно (как это имеет место вообще в обыкновенной алгебре), такое доказательство тождества не представляется возможным. В этом случае можем проверить тождество подстановкой отдельных наборов значений букв, что дает нам право лишь на предположение о правильности тождества, но не может служить доказательством. Но если тождество неверно, функциональная точка зрения дает нам простой способ опровержения этого тождества.

Действительно, так как имеет место эквивалентность

$$\overline{(a, b, \dots, c)}\,[F_1(a, b, \dots, c) = F_2(a, b, \dots, c)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists(a, b, \dots, c))\,\overline{[F_1(a, b, \dots, c) = F_2(a, b, \dots, c)]},$$

то достаточно найти хотя бы один набор $a_0, b_0, \ldots, c_0$ значений букв, при котором

$$F_1(a_0, b_0, \ldots, c_0) \neq F_2(a_0, b_0, \ldots, c_0).$$

Например, этим способом легко опровергается часто используемое учащимися ошибочное тождество

$$(a, b)(\sqrt{a^2 + b^2} = a + b).$$

Достаточно подставить $a = 3$ и $b = 4$ и получим $5 = 7$, т. е. ложное равенство. Мы доказали истинность высказывания

$$(\exists(a, b))\overline{(\sqrt{a^2 + b^2} = a + b)},$$

что эквивалентно $\overline{(a, b)(\sqrt{a^2 + b^2} = a + b)}$,

т. е. отрицанию данного тождества.

Мы приходим к выводу, что доказывать тождество двух алгебраических выражений можно только формально, на основе свойств операций, опровергать тождество можно и с функциональной точки зрения.

Общая логическая схема доказательства тождества $A = B$ может быть представлена следующим образом:

1-й шаг $A = A_1$;

2-й шаг $A_1 = A_2$;

. . . .

$(n-1)$-й шаг $A_{n-2} = A_{n-1}$;

n-й шаг $A_{n-1} = B$.

Исходя из свойства транзитивности тождества (это свойство непосредственно следует из определения тождества как с формальной, так и с функциональной точки зрения), получаем следующие истинные импликации:

$$(A = A_1) \wedge (A_1 = A_2) \rightarrow (A = A_2), \qquad (1)$$

$$(A = A_2) \wedge (A_2 = A_3) \rightarrow (A = A_3), \qquad (2)$$

. . . .

$$(A = A_{n-1}) \wedge (A_{n-1} = B) \rightarrow (A = B). \qquad (n-1)$$

Так как $A = A_1$ и $A_1 = A_2$ истинны, то истинна и их конъюнкция $(A = A_1) \wedge (A_1 = A_2)$ (n). Из (1) и (n) по правилу заключения получаем, что истинно также $A = A_2$. Так как истинны $A = A_2$ и $A_2 = A_3$, то истинна их конъюнкция $(A = A_2) \wedge (A_2 = A_3)$ $(n+1)$. Из (2) и $(n+1)$ по правилу заключения получаем, что истинно и $A = A_3$ и т. д.

05.1. В школьной практике доказательство тождества $A = B$ записывается в виде цепочки $A = A_1 = A_2 ... = B$. Как видно из предыдущего, эта простая запись обозначает довольно сложную логическую конструкцию и в установившейся практике обучения сущность ее не разъясняется учащимся.

Очевидна целесообразность проведения логического анализа доказательства тождества (в старших классах), что значительно облегчается благодаря применению знаний начал логики высказываний.

06. В алгебре высказываний имеется понятие, аналогичное понятию тождественных выражений обыкновенной алгебры: эквивалентные, или равные, формулы.

Равенство формул алгебры высказываний, как и тождество выражений в обыкновенной алгебре, допускает две трактовки: формальную и функциональную.

С формальной точки зрения две формулы равны, если применением свойств логических операций к одной из этих формул можно получить другую.

С функциональной точки зрения две формулы равны, если принимают равные значения (истинности) при любых (одинаковых) наборах значений (истинности) входящих в них букв. Таким образом, равные формулы выражают в различной форме одну и ту же логическую функцию.

В отличие от обыкновенной алгебры в алгебре высказываний функциональная точка зрения дает нам способ доказательства равенства формул, так как множество всевозможных наборов значений букв в любых формулах конечно. Например, равенство формул $A \wedge (B \vee C)$ и $A \wedge B \vee A \wedge C$ легко доказывается с помощью таблицы истинности, подтверждающей, что эти формулы выражают одну и ту же логическую функцию в различной форме. (Составление таблицы может быть предложено учащимся в качестве самостоятельной работы.)

Нетрудно заметить, что доказанное равенство выражает свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и совершенно аналогично тождеству $a(b+c) = ab + ac$, выражающему свойство дистрибутивности умножения относительно сложения в обыкновенной алгебре. Но в обыкновенной алгебре нет свойства дистрибутивности сложения относительно умножения, т. е. нет тождества $a + bc = (a+b) \cdot (a+c)$, а в алгебре высказываний имеет место и свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, т. е. равенство

$$A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

(Можно предложить учащимся доказать это равенство, а также равенства, выражающие свойства коммутативности и ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции.)

Целесообразно сопоставить свойства сложения и умножения в обыкновенной алгебре со свойствами дизъюнкции и конъюнкции в алгебре высказываний. Это сопоставление способствует лучшему усвоению аппарата каждой из этих алгебр.

Свойства сложения и умножения в обыкновенной алгебре	**Свойства дизъюнкции и конъюнкции в алгебре высказываний**
$a + b = b + a$ (коммутативность сложения);	$A \vee B = B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
$ab = ba$ (коммутативность умножения);	$A \wedge B = B \wedge A$ (коммутативность конъюнкции);
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность дизъюнкции);
$a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность умножения);	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (ассоциативность конъюнкции);
$a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);	$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);
	$A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
$a + 0 = a$;	$A \vee Л = A$;
$a \cdot 0 = 0$;	$A \wedge Л = Л$;
$a \cdot 1 = a$;	$A \wedge И = A$;
	$A \vee И = И$;
$a + a = 2a$;	$A \vee A = A$;
$a \cdot a = a^2$;	$A \wedge A = A$.

(Можно предложить учащимся доказать те свойства логических операций, которые еще не доказаны.)

С помощью свойств логических операций мы можем преобразовывать формулы алгебры высказываний, подобно тому как мы преобразовываем выражения обыкновенной алгебры, используя свойства ее операций.

Преобразуем с целью упрощения, например, формулу

$$A \wedge \overline{B} \vee A \wedge B.$$

Построим следующую цепочку равенств, основанных на известных нам свойствах логических операций:

$$A \wedge \overline{B} \vee A \wedge B = A \wedge (\overline{B} \vee B) = A \wedge И = A.$$

Учащимся могут быть предложены упражнения на преобразование формул и доказательство равенств.

Упростить формулы:

$$A \vee \bar{A} \wedge B;$$

$$(A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B);$$

$$(A \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C});$$

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C) \text{ и т. п.}$$

Доказать равенства:

$$A \vee A \wedge B = A;$$

$$A \vee B \wedge C \wedge D = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D);$$

$$A \wedge B \to C = (A \to C) \vee (B \to C) \text{ и т. п.}$$

07. Тождественные алгебраические выражения обладают важным свойством, которым мы часто пользуемся в практике тождественных преобразований, иногда в неявном виде.

Это свойство состоит в следующем: если в двух тождественных выражениях подставить вместо какой-нибудь буквы (или выражения) всюду, где она встречается, другую букву (или выражение), то снова получим тождественные выражения.

Пусть, например, требуется преобразовать в произведение трехчлен

$$(m + n)^2 + 2(m + n)b + b^2. \tag{1}$$

Чтобы на первых порах помочь учащимся распознавать в выражении (1) квадрат суммы двух чисел, подставляем вместо выражения $m + n$ (всюду, где оно встречается), например, букву a.

Тогда учащиеся сразу распознают известное тождество

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

и, подставляя в это тождество вместо буквы a выражение $m + n$, получают (согласно указанному свойству) тоже верное тождество

$$(m + n)^2 + 2(m + n)b + b^2 = [(m + n) + b]^2.$$

08. Аналогичное правило подстановки имеет место и в алгебре высказываний: если в равных формулах вместо какой-нибудь буквы, всюду, где она входит в формулы, подставить другую букву или формулу, получим снова равные формулы.

Например, если в равных формулах $X \to Y$ и $\overline{Y} \to \overline{X}$ вместо буквы X подставить формулу $A \wedge B$, получим снова равные формулы, т. е.

$$A \wedge B \to Y = Y \to \overline{A \wedge B}$$

или

$$A \wedge B \to Y = Y \to \overline{A} \vee \overline{B}.$$

В частности, если формула тождественно-истинна, т. е. при всевозможных наборах значений входящих в нее букв она принимает значение И, и если вместо какой-нибудь буквы всюду, где она входит в эту формулу, подставить другую букву или формулу, то снова получим тождественно-истинную формулу.

Приведем пример применения правила подстановки к тождественно-истинной формуле. Для обоснования закона расширенной контрапозиции [гл. 5, (14, 3)] необходимо доказать тождественную истинность следующих двух формул:

$$(X \wedge Y \to Z) \to (X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}), \tag{1}$$

$$(X \wedge Y \to Z) \to (\overline{Z} \wedge Y \to \overline{X}). \tag{2}$$

Однако достаточно доказать тождественную истинность формулы (1) и заменить в ней букву X буквой Y и обратно, точнее — применить правило подстановки. Но как применить здесь это правило? Если вместо X подставить Y, получится тождественно-истинная формула

$$(Y \wedge Y \to Z) \to (Y \wedge \overline{Z} \to \overline{Y})$$

и если в этой формуле подставить вместо Y букву X, также получится тождественно-истинная формула

$$(X \wedge X \to Z) \to (X \wedge \overline{Z} \to \overline{X}),$$

но не та, которую мы хотим получить. Здесь приходится трижды применить правило подстановки (хотя мы это делаем обычно в уме очень быстро):

вместо X подставить T:

$$(T \wedge Y \to Z) \to (T \wedge \overline{Z} \to \overline{Y});$$

вместо Y подставить X:

$$(T \wedge X \to Z) \to (T \wedge \overline{Z} \to \overline{X});$$

вместо T подставить Y:

$$(Y \wedge X \to Z) \to (Y \wedge \bar{Z} \to \bar{X})$$

и, применив свойство коммутативности конъюнкции, получим формулу

$$(X \wedge Y \to Z) \to (\bar{Z} \wedge Y \to \bar{X}). \qquad (2)$$

Так как эта формула получена из тождественно-истинной формулы (1) с помощью правила подстановки, то она также тождественно-истинна.

Следует отметить, что правило подстановки — одно из основных правил вывода на языке логики высказываний.

09. В математической и методической литературе встречаются многочисленные варианты толкования и определения понятий уравнения и неравенства.

Известна точка зрения, согласно которой тождество, как равенство, справедливое, т. е. верное при всех допустимых значениях входящих в него букв, противопоставляется уравнению, как равенству, справедливому не при всех допустимых значениях букв-неизвестных.

Если принять эту точку зрения, мы не сможем ответить на вопрос, что представляет собой запись $f(x) = \varphi(x)$, уравнение или тождество, пока не выясним, при всех или не при всех допустимых значениях неизвестного имеет место равенство. Если дано, например, уравнение $ax = b$, то, согласно этой точке зрения, при $a \neq 0$ это — уравнение, а при $a = b = 0$ это уже не уравнение, а тождество.

Известна другая точка зрения, согласно которой тождество не противопоставляется уравнению, а трактуется как его частный случай, причем уравнение рассматривается как равенство значений двух функций.

Равенство $f(x) = \varphi(x)$ (мы ограничимся рассмотрением уравнений с одним неизвестным) может оказаться верным при всех допустимых значениях неизвестного x, и тогда это уравнение называется тождеством. Оно может быть верным только при некоторых значениях неизвестного, называемых корнями уравнения, но возможно, что не найдется ни одного значения неизвестного, удовлетворяющего этому равенству. В этом последнем случае говорят, что уравнение не имеет корней (решений). Но существует ли само уравнение, если под уравнением понимать равенство, а равенство не имеет место ни при каких допустимых значениях неизвестного?

При $a = 0$ и $b \neq 0$ ни при каких значениях x не имеет место равенство $ax = b$. Можем ли мы говорить в этом случае об уравнении $ax = b$, если под уравнением понимать равенство?

Очевидно, что понятия «уравнение» и «равенство» неадекватны.

В методической литературе встречается и мнение о том, что уравнение — это не само равенство, а лишь вопрос о существовании равенства или о существовании значений неизвестного, при которых имеет место равенство. Эта точка зрения ошибочна, так как отождествляет понятие «уравнение» с понятием «решить уравнение». Действительно, решить уравнение — значит ответить на вопрос, существуют ли (а если существуют, то сколько и какие) значения неизвестного, которые удовлетворяют уравнению, но при этом вопрос о том, что такое само уравнение, остается открытым.

А. Фуше в своей «Педагогике математики» пишет: «Уравнение — равенство, которое еще не истинно и которое стремятся сделать истинным, без того, чтобы быть уверенным в том, что это достижимо».[1]

Вряд ли это толкование понятия уравнения что-нибудь разъясняет.

Трудности, возникшие в связи с уточнением общего понятия уравнения, а также неравенства (алгебраического), обусловлены тем, что эти понятия стремились свести только к математическим. В действительности же понятия «уравнение» и «неравенство» относятся к категории логических функций.

10. Известно, что всякое элементарное высказывание выражает свойство предмета или отношение между предметами. Свойства и отношения называются п р е д и к а т а м и.

Предикаты представляют собой логические функции и поэтому обозначаются с помощью функциональной символики. Например, если обозначить предикат (свойство) «есть простое число» символом «$P(\quad)$» — функциональным знаком P с одним пустым местом,— то символом «$P(5)$» выразится истинное высказывание «число 5 — простое число», символом «$P(4)$» — ложное высказывание «число 4 — простое число», а символом «$P(x)$», где x — натуральное число, отличное от 1,— предикат, или логическая функция «число x — простое число», обращающаяся в истинное или ложное высказывание в зависимости от значения x. Последнее надо понимать так: при подстановке вместо x натурального числа, отличного от 1, $P(x)$ обращается в истинное или ложное высказывание.

Мы получили пример логической функции, отличающейся от логических функций, выражающихся с помощью формул логики высказываний. В этих логических функциях аргумен-

---

[1] A. F o u c h é. La pedagogie des mathématiques. Paris, 1952, стр. 60.

тами служат переменные высказывания,[1] предикат $P(x)$ представляет собой логическую функцию от числового аргумента, т. е. от переменной, на место которой можно подставлять числа.

Областью определения этой логической функции является множество натуральных чисел, отличных от 1 (мы определили предикат $P(x)$ именно на этом множестве, чтобы его отрицание совпало с предикатом «есть составное число»), а областью значений этой функции — множество {И, Л}.

Предикат $P(x)$ разбивает область определения на два подмножества, на одном из которых он обращается в истинное высказывание (каждое число x из этого подмножества обращает его в истинное высказывание), на другом — в ложное. То из подмножеств области определения, на котором $P(x)$ обращается в истинное высказывание, назовем **множеством истинности** этой логической функции.

Мы привели пример **одноместного предиката**, выражающего свойство предмета. Естественным обобщением одноместных предикатов являются **многоместные предикаты**, с помощью которых выражаются отношения между предметами.

Например, если отношение «меньше», введенное в определенном числовом множестве (целых, рациональных или вещественных чисел), обозначить с помощью функционального знака «$<(\ ,\ )$» с двумя пустыми местами, то символом «$<(2, 3)$» выразится истинное высказывание «число 2 меньше числа 3», символом «$<(3,2)$»— ложное высказывание «число 3 меньше числа 2», а символом «$<(x, y)$» — логическая функция двух числовых переменных x и y, дающая при любой подстановке вместо x и y пары чисел из заданного множества истинное или ложное высказывание.

Предикат $<(x, y)$ определен на множестве всевозможных упорядоченных пар чисел из данного множества, и то подмножество пар чисел, на котором он обращается в истинное высказывание, является его множеством истинности.

11. Под уравнением $f(x) = \varphi(x)$ следует понимать логическую функцию: «числовые значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ находятся в отношении (связаны предикатом) равенства». Если применить символическое обозначение предикатов с помощью функциональных знаков [10], то уравнение $f(x) = \varphi(x)$ следовало бы записать следующим образом: «$=(f(x), \varphi(x))$». В этой записи подчеркнуто, что само равенство является функцией от аргумента x.

---

[1] Выражение «переменные высказывания» применяется в смысле переменных для высказываний, т. е. переменных, на место которых можно подставлять высказывания.

Значение неизвестного, при подстановке которого вместо x в числовых функциях $f(x)$ и $\varphi(x)$ логическая функция (уравнение) $f(x)=\varphi(x)$ принимает значение истинного высказывания, называется **решением**, или **корнем** уравнения.

Если при любом допустимом значении неизвестного x логическая функция обращается в истинное высказывание, т. е. если формула

$$(x)[f(x)=\varphi(x)]$$

выражает истинное высказывание, то данное уравнение называется тождеством.

Если при всех допустимых значениях неизвестного логическая функция $f(x)=\varphi(x)$ обращается в ложное высказывание, т. е. формула

$$(x)[\overline{f(x)=\varphi(x)}]$$

или

$$\overline{(\exists x)}[f(x)=\varphi(x)]$$

выражает истинное высказывание, то говорим, что уравнение не имеет решения. (Множество истинности логической функции пустое.)

Пусть M — множество, на котором рассматривается уравнение $f(x)=\varphi(x)$. С этим уравнением сопоставляется множество E решений (корней), т. е. множество истинности логической функции $f(x)=\varphi(x)$.

Таким образом, множество M разбивается на два подмножества E и $\overline{E}$ $(M=E\cup\overline{E})$, причем

$$E=\underset{x}{M}[f(x)=\varphi(x)],$$

$$\overline{E}=\underset{x}{M}[\overline{f(x)=\varphi(x)}].$$

Если вместо x в уравнении $f(x)=\varphi(x)$ подставить любое число из E, получим истинное высказывание, если же подставить вместо x любое число из $\overline{E}$, получим ложное высказывание.

Если $\overline{E}=\varnothing$ и, следовательно, $E=M$, уравнение — тождество. Если $E=\varnothing$ и, следовательно, $\overline{E}=M$, уравнение не имеет решений.

Решить уравнение — значит отыскать множество E его решений (множество истинности логической функции), если оно конечно, или же указать, что это множество бесконечно или пусто.

Например, уравнение «$x^2 + 3x = x - 1$» представляет собой логическую функцию («числа $x^2 + 3x$ и $x - 1$ находятся в отношении равенства») от числового аргумента x (в логике это обозначается и так: «$=(x^2 + 3x,\ x - 1)$»). Эта логическая функция обращается в истинное высказывание при подстановке $x = -1$ («$-2 = -2$»), при подстановке же вместо x любого другого числа (из данного множества, например, рациональных или вещественных чисел) она обращается в ложное высказывание.

x	$x^2 + 3x$	$x - 1$	$x^2 + 3x = x - 1$
-2	-2	-3	Л
-1	-2	-2	И
0	0	-1	Л
1	4	0	Л
2	10	1	Л

В приведенном участке бесконечной таблицы наглядно видно, что в отличие от первых трех столбцов, которые состоят из чисел, последний столбец состоит из символов И («истинно») и Л («ложно»). Это подчеркивает принадлежность уравнения к категории логических функций.

Таким образом, каждое из следующих символических выражений

$$x^2 + 3x = x - 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \tag{2}$$

$$5 + \frac{1}{x - 4} = \frac{5 - x}{x - 4} \tag{3}$$

является уравнением с одним неизвестным x, т. е. логической функцией от числового аргумента x, независимо от того, что (1) обращается в истинное высказывание только при одном значении аргумента (неизвестного уравнения), (2) обращается в истинное высказывание при любом допустимом значении аргумента ($x \neq 2$), а (3) при подстановке вместо x любого допустимого значения ($x \neq 4$) обращается в ложное высказывание.

Об уравнении (1) говорим, что оно имеет один корень или одно решение $x = -1$, об уравнении (2) говорим, что оно является тождеством или удовлетворяется тождественно, а об уравнении (3),— что оно не имеет решения.

12. Аналогично уточняется и понятие неравенства, содержащего буквы.

Под неравенством $f(x) > \varphi(x)$ (или $f(x) < \varphi(x)$) надо понимать предикат «больше» (или «меньше»), отнесенный к двум переменным (числам) $f(x)$ и $\varphi(x)$, т. е. логическую функцию «число $f(x)$ находится в отношении «больше» (или «меньше») с числом $\varphi(x)$».

Неравенству $f(x) > \varphi(x)$, как и уравнению, ставится в соответствие множество E истинности этой логической функции, т. е. множество всех тех значений x из множества M, на котором рассматривается данное неравенство, при подстановке которых вместо x эта логическая функция обращается в истинное высказывание. Множество E называется множеством решений данного неравенства.

Решить неравенство — значит отыскать множество его решений.

Как и при решении уравнения, здесь могут встретиться три случая:

1) $(E \subset M) \wedge \overline{M \subset E}$, т. е. множество E находится в отношении включения с множеством M, на котором рассматривается данное неравенство. В этом случае дополнение $\overline{E}$ множества E до множества M является множеством истинности логической функции $\overline{f(x) > \varphi(x)}$ или $f(x) \leqslant \varphi(x)$, т. е.

$$\overline{E} = \underset{x}{M}\,[\overline{f(x) > \varphi(x)}] = \underset{x}{M}[f(x) \leqslant \varphi(x)] \text{ —}$$

множество решений неравенства $f(x) \leqslant \varphi(x)$.

2) $(E \subset M) \wedge (M \subset E)$, т. е. $E = M$. В этом случае неравенство $f(x) > \varphi(x)$ удовлетворяется тождественно ($\overline{E}$ — пустое множество), а неравенство $f(x) \leqslant \varphi(x)$ не имеет решений.

3) E — пустое множество. В этом случае неравенство $f(x) > \varphi(x)$ не имеет решений и $\overline{E} = M$, т. е. неравенство $f(x) \leqslant \varphi(x)$ удовлетворяется тождественно.

13. Описанная выше (11—12) трактовка общих понятий уравнения и неравенства вполне доступна учащимся старших классов при предлагаемой нами методике преподавания, включающей изучение элементов логического языка математики.

Эта же точка зрения может быть отражена уже при первом ознакомлении учащихся с простейшими уравнениями, которое осуществимо в начальных классах. На этом этапе необходимо сопоставлять равенство, не содержащее буквы, с равенством, содержащим буквы.

О равенстве $5 + 8 = 13$ можем сказать, что это истинное (или верное) равенство, о равенстве $9 + 7 = 15$ можем сказать, что это ложное (или неверное) равенство, но о равенстве $x + 7 = 12$ мы не можем сказать ни то, ни другое. Оно может быть истинным равенством, но может быть и ложным.

В частности, при $x=5$ получаем истинное равенство $5+7=$ $=12$; если же вместо x подставить любое другое число, например 4 ($4+7=12$) или 8 ($8+7=12$), получаем ложное равенство.

Для разъяснения понятия уравнения на этом этапе можно использовать и таблицы. Пусть, например, имеем уравнение $3x+2=x+8$. Составляем таблицу, в которой, давая x различные числовые значения, определяем соответствующие значения левой и правой частей уравнения и устанавливаем, в каких случаях получается истинное, а в каких — ложное равенство.

x	$3x+2$	$x+8$	$3x+2=x+8$	Какое равенство получается?
0	2	8	$2=8$	Л
1	5	9	$5=9$	Л
2	8	10	$8=10$	Л
3	11	11	$11=11$	И
4	14	12	$14=12$	Л
5	17	13	$17=13$	Л

Необходимо подчеркнуть, что ни при каких других значениях x, кроме $x=3$, мы не получим истинного равенства. Значение $x=3$, при котором данное уравнение обращается в истинное равенство, называется корнем или решением этого уравнения.

Таким путем мы готовим учащихся к правильному пониманию сущности общих понятий уравнения и неравенства.[1]

14. Исходя из точки зрения на уравнение (неравенство) как на логическую функцию, нетрудно заметить, что отношение равносильности уравнений (неравенств) совпадает с отношением эквивалентности логических функций.

Действительно, если два уравнения равносильны с точки зрения теории уравнений, они имеют одни и те же решения, т. е. множества их решений совпадают. Это значит, что совпадают множества истинности логических функций, которые представляют собой эти уравнения, т. е. при одних и тех же значениях аргумента они оба истинны или оба ложны, а следовательно, эти логические функции эквивалентны.

Имеет место и обратное положение. Если две логические функции, представляющие собой уравнения или неравенства, эквивалентны, т. е. при одних и тех же значениях аргумента обе истинны или обе ложны, то это значит, что совпадают их множества истинности или совпадают множества решений данных уравнений или неравенств. Следовательно, эти урав-

---

[1] Примеры упражнений, предназначенных для такой подготовки, приведены в гл. 2, § 4.

нения (неравенства) равносильны и с точки зрения теории уравнений (неравенств).

Учитывая тождественность понятий «равносильность уравнений (неравенств)» и «эквивалентность логических функций», для обозначения равносильности уравнений или неравенств применим знак « $\longleftrightarrow$ » эквивалентности логических функций.

Например, решение уравнения $3x + 2 = x + 8$ можем записать в виде следующей цепочки равносильностей:

$$(3x + 2 = x + 8) \leftrightarrow (3x - x = 8 - 2) \leftrightarrow (2x = 6) \leftrightarrow (x = 3).$$

Такая запись весьма наглядна и позволяет обосновать процесс решения уравнения, состоящий из последовательности шагов, каждый из которых обратим. Исходя из связи эквивалентности с импликацией, получаем, что истинна конъюнкция

$$[(3x + 2 = x + 8) \rightarrow (x = 3)] \wedge [(x = 3) \rightarrow (3x + 2 = x + 8)].$$

Это означает, что число 3 и только это число является корнем данного уравнения.

15. Общая задача решения уравнения состоит в отыскании множества истинности логической функции, выражаемой этим уравнением, но это множество может изменяться в зависимости от того, на каком множестве рассматривается данное уравнение. Поэтому задача остается неопределенной, если не указано то множество, на котором рассматривается данное уравнение.

Если мы решаем уравнение $f(x) = \varphi(x)$ в множестве рациональных чисел, т. е. требуется найти рациональные корни этого уравнения, мы определяем множество решений

$$E_1 = \underset{x}{M}\,[(x \in R) \wedge (f(x) = \varphi(x))].$$

Если же решаем это уравнение в множестве действительных чисел, мы определяем множество решений

$$E_2 = \underset{x}{M}\,[(x \in D) \wedge (f(x) = \varphi(x))],$$

при этом множества E_1 и E_2 могут вообще не совпадать.

Пусть, например, дано уравнение

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

$$E_1 = \underset{x}{M}\,[(x \in N) \wedge (2x^2 + x - 1 = 0)] = \varnothing.$$

Это уравнение не имеет натуральные корни,

$$E_2 = \underset{x}{M}[(x \in C) \wedge (2x^2 + x - 1 = 0)] = \underset{x}{M}[x = -1] = \{-1\}.$$

Это уравнение имеет один целый корень $x = -1$.

$$E_3 = \underset{x}{M}[(x \in R) \wedge (2x^2 + x - 1 = 0)] =$$

$$= \underset{x}{M}\left[(x = -1) \vee \left(x = \frac{1}{2}\right)\right] = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Это уравнение имеет два рациональных корня: -1 и $\frac{1}{2}$.

16. Под системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

понимают конъюнкцию

$$[F_1(x, y) = 0] \wedge [F_2(x, y) = 0],$$

а решить систему — значит отыскать множество истинности этой конъюнкции, т. е. множество пар чисел (x, y), при которых эта логическая функция обращается в истинное высказывание.

Аналогично под системой неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > \varphi_1(x) \\ f_2(x) > \varphi_2(x) \end{cases}$$

понимают конъюнкцию

$$[f_1(x) > \varphi_1(x)] \wedge [f_2(x) > \varphi_2(x)],$$

а решить эту систему неравенств означает отыскать множество истинности этой логической функции, т. е. множество всех тех значений x, при которых эта конъюнкция представляет собой истинное высказывание:

$$E = \underset{x}{M}[(f_1(x) > \varphi_1(x)) \wedge (f_2(x) > \varphi_2(x))].$$

Если $E_1 = \underset{x}{M}[f_1(x) > \varphi_1(x)]$, т. е. E_1 — множество решений первого неравенства системы, а $E_2 = \underset{x}{M}[f_2(x) > \varphi_2(x)]$, т. е. E_2 — множество решений второго неравенства системы, то

$$E_1 \cap E_2 = \underset{x}{M}[f_1(x) > \varphi_2(x)] \cap \underset{x}{M}[f_2(x) > \varphi_2(x)] =$$

$$= \underset{x}{M}[(f_1(x) > \varphi_1(x)) \wedge (f_2(x) > \varphi_2(x))] = E,$$

т. е. множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений неравенств системы.

Рассмотрим неравенство вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0(1)$ или $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0(2)$. Обычно говорят, что решение каждого из неравенств (1), (2) сводится к решению двух систем неравенств, в действительности же решение каждого из этих неравенств сводится к решению дизъюнкции двух систем.

Множество решений неравенства (1) есть множество истинности логической функции:

$$[f(x) > 0] \wedge [\varphi(x) > 0] \vee [f(x) < 0] \wedge [\varphi(x) < 0].$$

Множество решений неравенства (2) есть множество истинности логической функции:

$$[f(x) > 0] \wedge [\varphi(x) < 0] \vee [f(x) < 0] \wedge [\varphi(x) > 0].$$

Эти логические функции являются точными выражениями следующих рассуждений:

1) неравенство (1) удовлетворяется всеми теми и только теми значениями x, при которых числитель **и** знаменатель положительны **или** числитель **и** знаменатель отрицательны;

2) неравенство (2) удовлетворяется всеми теми и только теми значениями x, при которых числитель положителен **и** знаменатель отрицателен **или** числитель отрицателен **и** знаменатель положителен.

17. При решении неравенств типа (1) или (2) учащиеся часто допускают ошибки при определении множества решений. Например, при решении неравенства $\frac{x-5}{x-1} > 0$ решаются две системы неравенств

$$\begin{cases} x-5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-5<0 \\ x-1<0, \end{cases}$$

между которыми не ставится никакой знак, хотя в действительности они соединены дизъюнктивно. (Если даже говорят «и» или говорят «или», то не обращают на это необходимого внимания, как вообще не обращают в установившейся практике преподавания необходимого внимания на логические операции.)

При определении множества решений данного неравенства часто допускают ошибку, состоящую в том, что вместо объединения множеств решений двух систем берут их пересечение и приходят к неправильному выводу, что данное неравенство не имеет решений, так как нет таких значений x, при которых неравенства $x > 5$ и $x < 1$ были бы истинными высказываниями.

Используя имеющиеся у учащихся логические знания, целесообразно наряду с традиционным способом решения таких неравенств применить и другой способ, сводящий задачу решения неравенства к задаче отыскания множества истинности соответствующей логической функции.

Этот способ состоит в следующем:

1) Данное неравенство (или система неравенств) представляется в виде логической функции, состоящей из более простых неравенств (обычно линейных), соединенных знаками основных логических операций (дизъюнкции, конъюнкции, отрицания).

Это представление конструируется таким образом, чтобы множество истинности полученной логической функции совпало со множеством решений неравенства.

2) Логическая функция, сопоставляемая данному неравенству, преобразовывается с помощью цепочки эквивалентностей с целью приведения к наиболее простому виду.

При построении этой цепочки пользуемся свойствами логических операций и, кроме того, следующими равносильностями:

При $a < b$:

$$(x > a) \wedge (x > b) \leftrightarrow (x > b); \tag{1}$$

$$(x < a) \wedge (x < b) \leftrightarrow (x < a); \tag{2}$$

$$(x < a) \wedge (x > b) \leftrightarrow \text{Л}. \tag{3}$$

Эти равносильности легко устанавливаются.

Так как $a < b$, то

$$\underset{x}{M}[x > b] \subset \underset{x}{M}[x > a],$$

поэтому

$$\underset{x}{M}[(x > a) \wedge (x > b)] = \underset{x}{M}[x > a] \cap \underset{x}{M}[x > b] = \underset{x}{M}[x > b].$$

Так как множества истинности логических функций $(x > a) \wedge (x > b)$ и $(x > b)$ равны, эти функции эквивалентны.

Эквивалентности (1)—(3) наглядно подтверждаются с помощью геометрической интерпретации множеств решений множествами точек прямой (рис. 10 *а*, *б*, *в*, *г*). Например, на рис. 10 *б* двояко заштрихованное множество точек (значений x) — множество истинности конъюнкции $(x < a) \wedge (x < b)$, а это — множество истинности $x < a$.

На рис. 10*в* нет двояко заштрихованного множества точек, множество истинности конъюнкции $(x < a) \wedge (x < b)$ — пустое множество, эта конъюнкция тождественно ложна (3).

Конъюнкцию $(x > a) \wedge (x < b)$ при $a < b$ (рис. 10*г*) обозначают сокращенно «$a < x < b$».

3) Определяется множество истинности простейшей формы логической функции. Это множество и будет множеством решений данного неравенства.

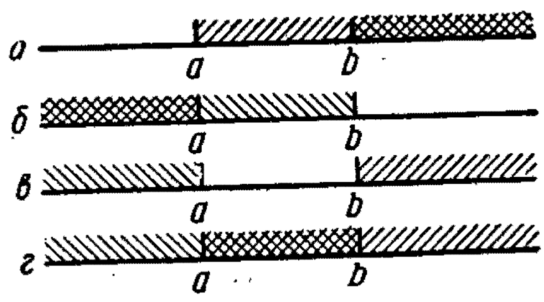


Рис. 10.

Для иллюстрации описанного метода покажем его применение в нескольких конкретных случаях.

1) Возьмем в качестве первого примера приведенное выше неравенство

$$\frac{x-5}{x-1} > 0.$$

$$\frac{x-5}{x-1} > 0 \leftrightarrow (x-5>0) \wedge (x-1>0) \vee (x-5<0) \wedge (x-1<0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x>5) \wedge (x>1) \vee (x<5) \wedge (x<1) \leftrightarrow (x>5) \vee (x<1).$$

Следовательно,

$$\underset{x}{M}\left[\frac{x-5}{x-1} > 0\right] = \underset{x}{M}\,[(x>5) \vee (x<1)] =$$
$$= \underset{x}{M}\,[x>5] \cup \underset{x}{M}\,[x<1].$$

2) Пусть требуется отыскать область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}.$$

Составим логическую функцию, истинную на том множестве значений аргумента, на котором числовая функция определена, т. е. такую, чтобы ее множество истинности совпало с областью определения данной функции, и упростим ее:

$$[(x-2\geqslant 0) \wedge (x+2>0) \vee (x-2\leqslant 0) \wedge (x+2<0)] \wedge$$
$$\wedge (1+x>0) \wedge (1-x\geqslant 0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(x\geqslant 2) \wedge (x>-2) \vee (x\leqslant 2) \wedge (x<-2)] \wedge (x>-1) \wedge$$
$$\wedge (x\leqslant 1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(x\geqslant 2) \vee (x<-2)] \wedge (x>-1) \wedge (x\leqslant 1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(x\geqslant 2) \vee \text{Л}] \wedge (x\leqslant 1) \leftrightarrow \text{Л}.$$

Так как составленная логическая функция всюду ложна, то данная функция нигде не определена.

18. Общеизвестно, что решение уравнений и неравенств, содержащих абсолютные величины, встречает у учащихся большие затруднения. Эти затруднения отчасти вызваны тем, что в результате освобождения уравнения или неравенства от знаков абсолютной величины оно распадается на несколько уравнений и неравенств, определенным образом связанных между собой логическими связками. Незнание логических операций, обозначаемых этими связками, является одной из причин возникающих затруднений.

Применение логических операций в явном виде позволяет нам точно записать логическую функцию, эквивалентную данному уравнению или неравенству, т. е. такую, что ее множество истинности есть множество решений данного уравнения или неравенства.

Приведем пример. Пусть требуется решить уравнение:

$$|x-2|-|x-1|-1=0.$$

Для краткости обозначим левую часть уравнения через $f(x)$, т. е.

$$f(x)=|x-2|-|x-1|-1.$$

Нам требуется решить уравнение $f(x)=0$, допустим, в множестве вещественных чисел.

Для освобождения уравнения от знаков абсолютной величины составим следующую таблицу:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$2-x$	1	$2-x$	0	$x-2$	
$-\lvert x-1\rvert$		$x-1$	0	$1-x$	-1	$1-x$	
-1		-1	-1	-1	-1	-1	
$f(x)$		0	0	$2-2x$	-2	-2	

В этой таблице определены слагаемые суммы, которой выражается $f(x)$ в промежутках $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$, а также при $x=1$ и $x=2$ и выражение самой функции $f(x)$ в этих же промежутках.

Используя эту таблицу, легко составить логическую функцию, эквивалентную данному уравнению:

$$[f(x)=0]\leftrightarrow(x\leqslant 1)\wedge(0=0)\vee(1<x<2)\wedge(2-2x=0)\vee$$
$$\vee(x\geqslant 2)\wedge(-2=0)\leftrightarrow(x\leqslant 1)\wedge \text{И}\vee \text{Л}\vee(x\geqslant 2)\wedge \text{Л}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(x\leqslant 1)\vee \text{Л}\vee \text{Л}\leftrightarrow(x\leqslant 1).$$

Следовательно,

$$\underset{x}{M}[f(x)=0]=\underset{x}{M}[x\leqslant 1].$$

Мы узнали, что данное уравнение имеет бесконечное множество решений: любое число, не превышающее 1, удовлетворяет этому уравнению.

19. Для лучшего понимания учащимися сущности уравнения и неравенства как логических функций целесообразно предлагать им вопросы в нижеследующей, непривычной в установившейся практике преподавания, постановке.

1) При подстановке каких чисел вместо x уравнение $x^2+2=3x$ обращается в истинное высказывание, в ложное?

2) При подстановке каких чисел вместо x неравенство $x^2-3x+2>0$ обращается в истинное высказывание, в ложное?

3) При каких значениях a и b уравнение $ax=b$ представляет собой тождественно-истинное высказывание, т. е. при подстановке вместо x любого числа обращается в истинное высказывание; представляет собой тождественно-ложное высказывание, т. е. при подстановке вместо x любого числа обращается в ложное высказывание?

4) При каких значениях a неравенство $x^2+2ax+1>0$ представляет собой тождественно-истинное высказывание?

5) Какие операции необходимо выполнить над множествами решений неравенств $x+2>0$ и $x-3<0$, чтобы получить множество решений системы неравенств:

$$\text{а)}\begin{cases}x+2>0\\x-3<0\end{cases}\quad \text{б)}\begin{cases}x+2>0\\x-3\geqslant 0\end{cases}\quad \text{в)}\begin{cases}x+2\leqslant 0\\x-3<0\end{cases}\quad \text{г)}\begin{cases}x+2\leqslant 0\\x-3\geqslant 0.\end{cases}$$

6) Составить логическую функцию, множество истинности которой есть область определения числовой функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+10}},$$

и определить это множество истинности.

7) Составить числовую функцию, область определения которой есть множество истинности следующей логической функции:

$$(x>1)\wedge(x>2)\vee(x<1)\wedge(x<2).$$

8) Чем отличаются множества:

$$E_1=\underset{x}{M}[(x\in N)\wedge(|x|<2)],$$

$$E_2 = \underset{x}{M}\,[(x \in C) \wedge (|x| < 2)],$$

$$E_3 = \underset{x}{M}[(x \in R) \wedge (|x| < 2)].$$

Глава 7. Систематизация и обобщение логических знаний учащихся

Предлагаемая тема «Элементы математической логики и теории множеств» (IX класс физико-математического профиля при дифференцированном обучении) при условии проведения работы, описанной в главах 3—6, должна быть использована для систематизации уже приобретенных учащимися логических и теоретико-множественных знаний, изучения элементов математической логики и теории множества в более общем виде с описанием некоторых приложений.

Ниже приводится примерное изложение этой темы, а также некоторые типы упражнений и краткие методические замечания.

01. Математическая логика возникла как результат весьма плодотворного применения к логике математических методов.

Название этой отрасли науки (математическая логика) вдвойне оправдано. С одной стороны, разрабатывая логический язык математики, она представляет собой л о г и к у м а т е м а т и к и, с другой — сама строится как математическая теория и с этой точки зрения представляет собой м а т е м а т и к у л о г и к и (см. гл. 1, § 2).

Наряду с применением к теории математического доказательства, к усовершенствованию аксиоматического метода построения математических теорий математическая логика получила в последнее время новое замечательное приложение вне математики. Советским ученым В. И. Шестаковым и американским ученым К. Шенноном в 30-х годах было открыто важное применение аппарата математической логики к анализу и синтезу релейно-контактных схем, широко используемых в автоматических устройствах. В настоящее время математическая логика находит применение в разработке конструкций современных электронных вычислительных машин, в теории программирования (подготовке задач к решению на этих машинах). В качестве составной части к и б е р н е т и к и, изучающей процессы управления и связи в живых организмах и механизмах, математическая логика находит применение в медицине, лингвистике и в других областях науки и практики, везде, где ставится задача воссоздания логико-математической модели процессов управления на электронных вычислительных машинах.

02. Мы уже знакомы с началами алгебры высказываний. Приведем наши знания в систему.

Алгебра высказываний играет в математической логике такую же роль, какую играет, например, арифметика натуральных чисел в учении о числе. Она составляет наиболее элементарную, но вместе с тем фундаментальную часть математической логики.

В алгебре высказываний элементарные высказывания рассматривают как целые, отвлекаются от их содержания и внутренней логической структуры и считают, что каждое высказывание истинно или ложно и не может быть одновременно и истинным и ложным.

Обозначим, как и раньше, произвольные высказывания большими буквами латинского алфавита $A, B, C, ..., X, Y, ...$ или одной буквой с индексами $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$[1]

Из элементарных высказываний в практике рассуждений, в частности в математике, составляются сложные высказывания при помощи различных логических операций.

Эти логические операции над элементарными и сложными высказываниями и составляют предмет логики, или алгебры высказываний.

03. Каждому истинному высказыванию припишем в качестве значения истинности символ «1», каждому ложному высказыванию — символ «0».

Значение истинности, соответствующее данному высказыванию, назовем для краткости просто з н а ч е н и е м этого высказывания. С символами «1» и «0» здесь не связывается их обычный смысл, они применяются лишь как символ истинного и ложного высказываний (вместо букв И и Л, которые мы применяли до сих пор в том же смысле) и называются также л о г и ч е с к и м и к о н с т а н т а м и (постоянными).

Логика высказываний представляет собой алгебру, оперирующую переменными $A, B, C, ..., X, Y, ...$, каждая из которых может принимать два значения — 1 (истина) и 0 (ложь), и называемую б у л е в о й а л г е б р о й по имени английского ученого Дж. Б у л я, впервые разработавшего начала этой алгебры в середине XIX в.

03.1. Необходимо обратить внимание учащихся на целесообразность сохранения обозначения значений истинности буквами И и Л в применениях логики высказываний в обыкновенной алгебре, ибо знаки 1 и 0 могут встречаться в одной и той же формуле в различных смыслах: как числа и как

---

[1] Эти буквы обозначают по существу не сами высказывания, а переменные для высказываний, называемые также п р о п о з и ц и о н а л ь н ы м и переменными (от латинского *propositio* — предложение, высказывание).

значения истинности. Например, если хотим записать, что конъюнкция $(x<0) \wedge (x>0)$ тождественно ложна, то лучше писать $(x<0) \wedge (x>0) \longleftrightarrow$ Л, чем $(x<0) \wedge (x>0) \longleftrightarrow 0$, хотя и в последней записи легко обнаружить различный смысл нулей: знак эквивалентности связывает высказывания, следовательно, последний нуль обозначает ложное высказывание, а знаки отношений «меньше» и «больше» связывают числа, следовательно, первые два нуля обозначают число нуль.

Возникает вопрос: оправдан ли методически переход к применению символов 1 и 0 для обозначения значений истинности, если уже применялись буквы И и Л?

Нам кажется, что этот переход оправдывается методически тем, что символы 1 и 0 более удобны для абстрагирования, т. е. для лишения их конкретного смысла истинного и ложного высказывания при переходе от конкретной модели булевой алгебры в виде алгебры высказываний к абстрактной булевой алгебре, и для приписывания им другого конкретного смысла при переходе от абстрактной булевой алгебры к другой ее конкретной модели. Кроме того, символы 1 и 0 удобны для сопоставления логических операций с операциями двоичной арифметики, в приложениях алгебры высказываний к синтезу схем устройств, работающих в двоичной системе счисления.

Ознакомление учащихся с различными обозначениями значений истинности высказываний (и вообще с различными вариантами логической символики) позволяет в различных приложениях выбрать наиболее удобную символику и помогает им в самостоятельном чтении литературы, где встречаются различные системы обозначений.

04. Основными операциями алгебры высказываний будем считать уже известные нам операции: отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию.

04.1. Следует повторить определения этих операций, записать эти определения с помощью соответствующих таблиц истинности, с применением символов 1 и 0.

Можно сообщить учащимся, что для обозначения конъюнкции, кроме знака « $\wedge$ », применяют знак обычного умножения, который иногда опускается ($X \cdot Y$ или XY).

Дизъюнкцию $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ будем обозначать сокращенно символом $\bigvee\limits_{i=1}^{n} X_i$, аналогично конъюнкцию $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ будем обозначать символом $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} X_i$. Можно предложить учащимся в качестве упражнения определить строгую дизъюнкцию (соответствующую разделительному «или») и записать это определение с помощью таблицы истинности.

04.2. Из трех основных операций только дизъюнкция и конъюнкция подходят под определение общего понятия операции как закон композиции. Отрицание же не представляет собой закона композиции, так как оно применимо к одному высказыванию. Поэтому в некоторых руководствах отрицание отнесено к категории преобразований высказывания. Однако большинство авторов включает отрицание в категорию логических операций.

05. Перечислим свойства основных операций:

[1] $\overline{\overline{A}} = A$ (закон двойного отрицания);
[2] $A \vee B = B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
[3] $A \wedge B = B \wedge A$ (коммутативность конъюнкции);
[4] $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ (ассоциативность дизъюнкции);
[5] $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ (ассоциативность конъюнкции);
[6] $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

[7] $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);

$$\left.\begin{array}{ll}[8] & A \vee A = A; \\ [9] & A \wedge A = A;\end{array}\right\} \text{(законы идемпотентности);}$$

[10] $A \vee 0 = A$;
[11] $A \wedge 1 = A$;
[12] $A \wedge 0 = 0$;
[13] $A \vee 1 = 1$;
[14] $A \vee \overline{A} = 1$;
[15] $A \wedge \overline{A} = 0$;
[16] $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;
[17] $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

В дальнейшем будем часто ссылаться на свойства, выраженные равенствами [1]—[17], называя их соответствующими номерами.

05.1. Целесообразно напомнить о смысле знака равенства в выражении свойств [1]—[17]. Формулы, связанные этим знаком, при любых одинаковых наборах значений переменных принимают равные значения. Имеется полная аналогия с тождественными выражениями обыкновенной алгебры. Сложные высказывания, выражаемые равными формулами, одновременно истинны или ложны, независимо от значений истинности входящих в них переменных, т. е. э к в и в а л е н т н ы.

05.2. При составлении таблиц истинности наборы значений переменных можно писать в любом порядке. Однако для устранения возможности потери наборов условимся располагать их в таблице так, что если каждый набор из нулей и единиц стали бы рассматривать как двоичное число, эти числа оказались бы расположенными по величине — от наименьшего к наибольшему.

Например, наборы значений трех переменных расположим следующим образом:

A	*B*	*C*
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

05.3. *Упражнения:*

1) Составить таблицы истинности для доказательства свойств [6], [7], [16], [17].

2) Удобен ли метод таблиц истинности для доказательства равенств, в которые входит большое число переменных? Определить число всевозможных наборов значений n переменных (или число строк таблицы истинности, соответствующей формуле с n переменными).

3) Свойства [16] и [17] распространяются на любое число переменных. Записать соответствующие равенства для n переменных и доказать их индукцией по числу переменных.

06. Внимательное рассмотрение равенств [2]—[17] позволяет обнаружить весьма интересную «двойственность» в конструкции формул. Если в любом из этих равенств заменить символы $\vee$, $\wedge$, 0, 1 соответственно через $\wedge$, $\vee$, 1, 0, получим другое из этих равенств.

Оказывается, в алгебре высказываний имеет место такой принцип двойственности (который, разумеется, доказывается, но мы его примем без доказательства): из равенства, обе части которого составлены из элементарных высказываний, их отрицаний и логических констант (0 и 1) при помощи знаков дизъюнкций и конъюнкций, можно получить новое равенство путем замены знака дизъюнкции знаком конъюнкции, нуля единицей и обратно.

Этот принцип позволяет из уже доказанного равенства получить еще одно, двойственное ему, не требующее специального доказательства.

06.1. *Упражнение.*

Указать среди равенств [2]—[17] пары взаимодвойственных.

07. Свойства [1]—[17] служат основой для преобразования одних формул в другие, равные им, так же как в обычной алгебре свойства операций сложения и умножения служат основой тождественных преобразований.

07.1. *Упражнения:*

1) Доказать с помощью *а*) таблиц истиииости и *б*) тождествеиных преобразоваиий следующие равеиства:

[18] $A \wedge (A \vee B) = A$ (закои поглощеиия);

[19] $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$ (закои склеивания).

Записать двойствеииые им равеиства.

2) Упростить формулы: $\overline{A} \vee A \wedge \overline{B}$; $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$; $(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и записать двойствеииые равеиства.

3) Мы прииялн в качестве осиовиых операций алгебры высказываиий отрицаиие, дизъюикцию и коиъюикцию, давая каждой из иих самостоятельиое определеиие, иезависимое от других. Нельзя ли какую-иибудь из этих операций определить через две другие и, следовательио, ограиичиться двумя осиовиыми операциями?

08. Мы уже знаем, какое важное значение в практике рассуждений имеет импликация.

08.1. Здесь повторяется определение импликации, ее сопоставление с условным высказыванием в традиционном смысле, ее выражение через основные операции (гл. 5, § 10, 11).

Целесообразно уточнить, что импликация представляет собой логическую операцию, т. е. закон композиции, по которому из двух высказываний X и Y получаем новое высказывание $X \to Y$, где учитывается лишь связь основания и следствия по значению истинности и не принимается во внимание их связь по содержанию.

Логическое следование высказывания Y из высказывания X представляет собой не операцию, а отношение, в котором находятся эти два высказывания. Поэтому никак нельзя смещать отношение логического следования с импликацией.

В логике высказываний рассматривается отношение следования одной функции-высказывания из другой (или одной формулы из другой), независимо от содержания фигурирующих в них элементарных высказываний. Мы говорим, что формула φ является следствием из формул f_1, $f_2, \ldots, f_n$, называемых посылками, если импликация $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} f_i \to \varphi$ истинна (тождественна). Это определение соответствует обычному пониманию следствия. Действительно, так как эта импликация истинна, то истинность посылок f_i, т. е. их конъюнкция, определяет истинность следствия φ.

08.2. *Упражнения:*

1. Доказать равеиства:

а) $A \to (A \to B) = A \to B$;

б) $A \wedge B = \overline{A \to \overline{B}}$;

в) $\overline{A \to B} = A \wedge \overline{B}$;

г) $A \to (B \to C) = \overline{A \wedge B} \to C$;

д) $A \vee B = \overline{A} \to B$.

2. Даны два высказывания: а) если число делится на 2 и делится на 3, то оно делится на 6; б) число не делится на 2 или не делится на 3, или делится на 6.

Доказать эквивалентность этих высказываний, отвлекаясь от их конкретного содержания.

3. Даны два высказывания: а) если «a делится на c», то «ab делится на c» и если «b делится на c», то «ab делится на c»; б) если «a делится на c», или «b делится на c», то «ab делится на c».

Доказать эквивалентность этих высказываний, отвлекаясь от их конкретного содержания.

09. Из других логических операций отметим строгую дизъюнкцию, соответствующую разделительному «или» и операцию Шеффера (несовместность двух высказываний), находящую широкое применение в теории электронных вычислительных машин.

Строгая дизъюнкция, исходя из обычного смысла разделительного «или», определяется как такая логическая операция, в результате которой из двух высказываний X и Y образуется сложное высказывание $X \dot{\vee} Y$ (знак дизъюнкции с точкой), истинное тогда и только тогда, когда только одно из высказываний X или Y истинно, т. е. когда «X истинно и Y ложно» или «Y истинно и X ложно».

Операция Шеффера определяется как такая операция над двумя высказываниями X и Y, в результате которой образуется сложное высказывание «X/Y», ложное тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны.

09.1. *Упражнения:*

1) Исходя из определения строгой дизъюнкции, составить соответствующую этому определению таблицу истинности и выразить строгую дизъюнкцию через основные операции.

2) Исходя из определения операции Шеффера, составить соответствующую таблицу истинности и доказать следующие равенства:

а) $X/Y = \overline{X} \vee \overline{Y}$;
б) $X/Y = X \to \overline{Y}$;
в) $X/Y = \overline{X \wedge Y}$;
г) $X/Y = Y/X$;
д) $X/X = \overline{X}$;
е) $\overline{X/Y} = X \wedge Y$.

3) Доказать, что одну операцию Шеффера можно принять за основную операцию алгебры высказываний, т. е. что все остальные логические операции можно выразить через операцию Шеффера.

10. Мы уже знаем, что всякая формула алгебры высказываний выражает некоторую функцию от переменных для высказываний, которую мы назвали л о г и ч е с к о й ф у н к ц и е й или ф у н к ц и е й-в ы с к а з ы в а н и е м.

Особое значение имеют те логические функции, которые принимают значение истинности 1 при любых наборах значений истинности высказываний-аргументов, т. е. обращаются в истинное высказывание при любой конкретной подстановке вместо переменных определенных высказываний.

Формула, выражающая такую функцию, называется всегда истинной или тождественно-истинной формулой алгебры высказываний и служит выражением закона логики на языке этой алгебры.

Если формула $f(X, Y, ..., Z)$ тождественно-истинна, мы пишем $f(X, Y, ..., Z) = 1$.

Например, тождественно-истинная формула $X \vee \overline{X}$ (мы доказали, что $X \vee \overline{X} = 1$, гл. 5, § 08) выражает закон исключенного третьего, а тождественно-истинная формула $(X \to Y) \wedge \wedge X \to Y$ выражает закон, на котором основано правило заключения.

11. Следует повторить уже известные учащимся допустимые правила вывода, выясняя при этом, на каких законах логики, выражаемых тождественно-истинными формулами алгебры высказываний, основаны эти правила вывода.

11.1. *Упражнения:*

1) Доказать тождественную истинность формулы $X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to \to (X \to Z)$. Какое правило вывода основано на этой тождественно-истинной формуле алгебры высказываний?

2) Доказать, что из посылок $A \to B$, $B \to C$ и $C \to D$ следует заключение $A \to D$.

Распространить это правило вывода на случай n посылок, т. е. доказать, что из посылок $X \to X_1$, $X_2 \to X_3$, ..., $X_{n-1} \to X_n$ следует заключение $X \to \to X_n$. (Это доказательство можно осуществить индукцией по числу посылок.)

3) Доказать тождественную истинность нижеследующих формул:

а) $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \to (X \to Y \wedge Z)$;

б) $(X \to Y) \wedge (Z \to T) \to (X \wedge Z \to Y \wedge T)$;

в) $(X \to Z) \wedge (Y \to Z) \to (X \vee Y \to Z)$;

г) $(X \to Y) \wedge (Z \to T) \to (X \vee Z \to Y \vee T)$.

Привести примеры рассуждений, в которых применяются основанные на этих формулах правила вывода.

4) Доказать, что из посылок $X \to Y$ и $\overline{X} \to Y$ следует заключение Y.

5) Доказать, что из посылок $X \to Y$ и $X \to \overline{Y}$ следует заключение $\overline{X}$.

6) Доказать, что из посылок $X \to Y \wedge Z$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ следует заключение $\overline{X}$.

7) Доказать, что из посылок $X \to Y$ и $\overline{X}$ не следует заключение $\overline{Y}$ и что из посылок $X \to Y$ и Y не следует заключение X.

8) Доказать, что из посылок $X \vee Y$, $\overline{X} \vee \overline{Y}$ и X следует заключение $\overline{Y}$.

9) Доказать, что из посылок $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $X_1 \vee X_2$ и $\overline{Y_1 \wedge Y_2}$ следуют заключения $Y_1 \to X_1$ и $Y_2 \to X_2$.

10) Следует ли из посылок: если $x=2$, то $x^2=4$ и $x^2 \neq 4$ заключение $x \neq 2$? Следует ли из посылок: если $x=2$, то $x^2=4$ и $x \neq 2$ заключение $x^2 \neq 4$?

12. Равные формулы алгебры высказываний, хотя и различные по форме, имеют одинаковое распределение значений истинности в таблице и, следовательно, определяют одну и ту же функцию. Отсюда следует, что каждая логическая функция может выражаться в различной форме с помощью равных формул.

Важное значение в приложениях имеют так называемые нормальные формы, в которые представима любая функция алгебры высказываний.

Рассмотрим произвольную функцию n переменных

$$f(X_1, X_2, ..., X_n).$$

(Так как здесь идет речь только о функциях-высказываниях, иначе называемых также булевыми функциями, будем говорить просто «функции».)

Условимся о следующих обозначениях:

$$X^\alpha = \begin{cases} \overline{X}, & \text{если } \alpha = 0; \\ X, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Условимся также для упрощения записи формул опускать знак конъюнкции, т. е. вместо $X \wedge Y$ писать XY всюду, где это не может привести к недоразумениям в связи с применением этого же знака для обозначения обычного умножения.

Конъюнкцию вида $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$, составленную из n элементарных высказываний или их отрицаний, назовем элементарной конъюнкцией n-го ранга.

Неравная тождественно 0 функция n аргументов представима в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций n-го ранга, которая и называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой этой функции (сокращенно с. д. н. ф.)

Прежде всего докажем, что функция $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(X_1, X_2, ..., X_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, ..., X_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \tag{1}$$

где символ $\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}$ обозначает дизъюнкцию, распространенную на всевозможные наборы $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ из нулей и единиц (их всего 2^n).

Покажем, что $X_i^{\alpha_i} = 1$ тогда и только тогда, когда $X_i = \alpha_i$. Действительно, если $X_i = \alpha_i = 0$, то $X_i^{\alpha_i} = \overline{X}_i = \overline{0} = 1$ и если $X_i = \alpha_i = 1$, то $X_i^{\alpha_i} = X_i = 1$. Если же $X_i = 1$ и $\alpha_i = 0$, то $X_i^{\alpha_i} = \overline{X}_i = \overline{1} = 0$ и если $X_i = 0$ и $\alpha_i = 1$, то $X_i^{\alpha_i} = X_i = 0$.

Таким образом, элементарная конъюнкция $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$ не обращается в нуль только в том случае, когда одновременно выполняются следующие n равенства: $X_i = \alpha_i$ (2) при $i = 1, 2, ..., n$, т. е. $X_1 = \alpha_1$, $X_2 = \alpha_2$, ..., $X_n = \alpha_n$. Если же хотя бы одно из этих равенств не имеет место, эта конъюнкция обращается в 0.

Для доказательства равенства (1) возьмем произвольный набор $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ нулей и единиц, т. е. значений аргументов. Левая часть равенства (1) обратится в $f(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$. В правой части те члены дизъюнкции, в которых не выполняются все равенства (2) (не для всех i $\alpha_i' = \alpha_i$), обратятся в 0. Остается один член, в котором $\alpha_i' = \alpha_i$ для всех i и который обратится в 1, т. е. получаем равенство $f(\alpha_i', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') = f(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$.

Равенство (1) доказано.

Это равенство можно записать проще. Так как $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ равна либо 1, либо 0, то стоящая в правой части равенства (1) дизъюнкция содержит лишь те члены, для которых $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, т. е. имеем:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1} X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}. \qquad (3)$$

Здесь дизъюнкция состоит из элементарных конъюнкций, соответствующих только тем наборам значений аргументов, для которых

$$f(\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Мы получили с. д. н. ф. [3] функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Если функция задана таблицей, легко записать ее с. д. н. ф. Для этого отбирают все наборы значений аргументов, на которых функция равна 1, составляют соответствующие этим наборам элементарные конъюнкции и соединяют их дизъюнктивно.

Приведем в качестве примера составление с. д. н. ф. функции, заданной следующей таблицей:

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Отбираем все наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ значений переменных, на которых функция равна 1: (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) и (1,1,1); составляем соответствующие им элементарные конъюнкции 3-го ранга вида $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$ и соединяем их дизъюнктивно:

$$f(X_1, X_2, X_3) = \overline{X}_1 X_2 X_3 \vee X_1 \overline{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \overline{X}_3 \vee X_1 X_2 X_3.$$

(Очевидно, в с. д. н. ф. нельзя представить функцию, тождественно равную 0, ибо не нашли бы ни одного набора значений переменных, на котором функция равна 1.)

Если функция тождественно равна 1, то ее представление в виде с. д. н. ф. с n-переменными содержит все 2^n членов. Например, в виде с. д. н. ф. функции двух переменных 1 представляется следующим образом: $f(X, Y) = \overline{X}\overline{Y} \vee \overline{X}Y \vee X\overline{Y} \vee XY$. (Нетрудно убедиться в том, что эта функция тождественно равна 1.)

Если перевести доказательство представимости функции в с. д. н. ф. по принципу двойственности, получим доказательство представимости функции в **совершенную конъюнктивную нормальную форму** (с. к. н. ф.), двойственную с. д. н. ф.:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bigwedge_{f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0} (X_1^{\overline{\alpha}_1} \vee X_2^{\overline{\alpha}_2} \vee \ldots \vee X_n^{\overline{\alpha}_n}),$$

где $\overline{\alpha}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$

Для функции, заданной выше таблицей, легко найти с. к. н. ф. Достаточно выбрать все наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ значений аргументов, на которых функция равна 0, составить соответствующие им дизъюнкции вида $X_1^{\overline{\alpha}_1} \vee X_2^{\overline{\alpha}_2} \vee X_3^{\overline{\alpha}_3}$ и соединить их конъюнктивно. Получим:

$$f(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3)(X_1 \vee \overline{X}_2 \vee X_3)(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_3).$$

12.1. *Упражнения.*

1) Привести доказательство представимости любой логической функции, неравной тождественно 1, в с. к. н. ф.

2) Задать с помощью таблиц истинности всевозможные функции двух переменных (их всего 16, включая и те, которые существенно не зависят от двух переменных). Записать для этих функций с. д. н. ф. и с. к. н. ф.

3) Записать функцию, заданную нижеследующей таблицей, в с. д. н. ф. и с. к. н. ф. Путем преобразований получить из с. к. н. ф. этой функции ее с. д. н. ф.

X_1	X_2	X_3	$\varphi(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

13. Запись функции в виде с. д. н. ф. (или с. к. н. ф.) не является самой «экономичной». Действительно, возьмем с. д. н. ф. приведенной выше функции

$$f(X_1, X_2, X_3) = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee X_1\bar{X}_2X_3 \vee X_1X_2\bar{X}_3 \vee X_1X_2X_3. \quad (a)$$

Ее можно упростить различными способами. Сгруппировав последний член с первым, или со вторым, или с третьим и применив свойства 05(6, 14, 11), получим еще три формы данной функции:

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_2X_3 \vee X_1\bar{X}_2X_3 \vee X_1X_2\bar{X}_3; \quad (b)$$

$$f(X_1X_2X_3) = \bar{X}_1X_2X_3 \vee X_1X_3 \vee X_1X_2\bar{X}_3; \quad (c)$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = \bar{X}_1X_2X_3 \vee X_1\bar{X}_2X_3 \vee X_1X_2. \quad (d)$$

Эти формы (дизъюнкции элементарных конъюнкций) называются дизъюнктивными нормальными формами (д. н. ф.) данной функции. Как видно, вообще одна и та же функция может быть представлена в различных д. н. ф. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма отличается среди всех д. н. ф. тем, что все ее члены — элементарные конъюнкции одного и того же ранга, равного числу аргументов данной функции.

В приложениях алгебры высказываний к синтезу контактных и электронных схем важное экономическое значение имеет отыскание минимальной формы функции, т. е. такой, например, д. н. ф., которая содержала бы наименьшее число букв и знаков операций (вообще символов алфавита) по сравнению с другими д. н. ф. этой функции.

В приведенном выше примере из выписанных четырех д. н. ф. данной функции (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) каждая из трех последних содержит меньшее число букв, чем с. д. н. ф. (*a*), причем одинаковое, но отсюда не следует, что каждая из форм (*b*), (*c*), (*d*) является минимальной для данной функции. Может существовать для данной функции д. н. ф., отличная от выписанных выше и содержащая еще меньшее число букв.

Оказывается, что для данной функции существует д. н. ф. с числом букв меньшим, чем в любой другой д. н. ф. этой функции.

Присоединим к с. д. н. ф. (*a*) дизъюнктивно еще две конъюнкции $X_1X_2X_3$ (на основании свойства идемпотентности 05[8]) и воспользуемся свойствами коммутативности 05[2] и дистрибутивности 05[6]. Получим:

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_2X_3(\bar{X}_1 \vee X_1) \vee X_1X_3(\bar{X}_2 \vee X_2) \vee$$

$$\vee X_1X_2(\bar{X}_3 \vee X_3).$$

Используя свойства 05[14] и [11], получим минимальную д. н. ф. данной функции

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_2X_3 \vee X_1X_3 \vee X_1X_2.$$

В математической логике разработаны различные методы минимизации (отыскания минимальных форм) функций алгебры высказываний (методы минимизирующих карт, неопределенных коэффициентов, Блэка-Порецкого, Нельсона и др.)

Рассмотрим один из них — метод Блэка-Порецкого, применимый к функции, заданной в любой д. н. ф. Прежде всего необходимо доказать следующее предложение: если в д. н. ф., которую мы обозначим через D, входят конъюнкции вида AX и $B\overline{X}$, то эту д. н. ф. можно записать следующим образом: $D = D \vee AB$.

Справедливость этого равенства устанавливается очень просто: если $D = 1$, то и $D \vee AB = 1$, независимо от значения AB, если же $D = 0$, то так как D — дизъюнкция, то в нуль должны обращаться все ее члены, в том числе AX и $B\overline{X}$, а это возможно только тогда, когда либо A, либо B обращается в нуль, так как X и $\overline{X}$ одновременно не могут быть равны 0. Тогда конъюнкция $AB = 0$ и $D \vee AB = 0$.

Метод Блэка-Порецкого состоит в следующем:

1) Выписывают все пары конъюнкций вида AX и BX и присоединяют к данной д. н. ф. дизъюнктивно конъюнкции вида AB, соответствующие всем этим парам.

2) Приводят «подобные» члены на основании закона идемпотентности 05[8].

3) Применяют везде, где это возможно, закон поглощения 05[18] и закон склеивания 05[19].

В приведенном выше примере при нахождении минимальной д. н. ф. мы выполнили примерно такую же процедуру.

Если точно придерживаться метода Блэка-Порецкого, мы должны следующим образом выполнить это преобразование:

1) выписывать все пары конъюнкций вида AX и $B\overline{X}$ в заданной с. д. н. ф. (a):

$$(\overline{X}_1X_2X_3,\ X_1X_2X_3);\ (X_1\overline{X}_2X_3,\ X_1X_2X_3);\ (X_1X_2\overline{X}_3,\ X_1X_2X_3);$$

2) присоединить к данной с. д. н. ф. дизъюнктивно конъюнкции

$$X_2X_3,\ X_1X_3,\ X_1X_2\colon f(X_1, X_2, X_3) = \overline{X}_1X_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3 \vee$$

$$\vee X_1X_2X_3 \vee X_1X_2\overline{X}_3 \vee X_2X_3 \vee X_1X_3 \vee X_1X_2;$$

3) применить закон поглощения:

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_2X_3 \vee X_1X_3 \vee X_1X_2.$$

13.1. *Упражнение.* Найти минимальную д. н. ф. функции

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 \vee X_1\overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1}\overline{X_2}\,\overline{X_3} \vee \overline{X_2}\,\overline{X_3} \vee X_1\overline{X_3}.$$

13.2. Мы построили начала алгебры высказываний в виде конкретной теории, в которой содержательно истолкованы как объекты (истинные и ложные высказывания), так и операции, выполняемые над этими объектами.

Покажем, как может быть построена абстрактная булевая алгебра, одной из моделей которой является описанная выше алгебра высказываний, и что другими моделями этой же абстрактной алгебры являются алгебра множеств и алгебра контактных схем.

Вопросы, касающиеся уточнения понятия модели и аксиоматического построения теории, будут рассматриваться во второй части книги.

14. Отвлечемся от конкретной природы объектов и конкретного смысла операций алгебры высказываний.

Под A, B, C, ..., X, Y, ... будем понимать сейчас просто переменные для элементов некоторого множества, конкретная природа которых не определена.

Предполагаем определенным в этом множестве отношение равенства, обозначаемое знаком «=» и обладающее свойствами: рефлексивности ($X = X$ для всякого X), симметричности (если $X = Y$, то $Y = X$) и транзитивности (если $X = Y$ и $Y = Z$, то $X = Z$).

В этом множестве определены две операции: одну из них обозначим символом «$\oplus$» и назовем сложением, другую — символом «$\odot$» и назовем умножением.

Эти операции удовлетворяют условиям, выраженным в нижеследующих аксиомах:

I. Существует элемент, обозначаемый символом «0», такой, что $X \oplus 0 = X$ для всякого X. (Элемент 0 — нейтральный элемент множества относительно сложения.)

II. Существует элемент, обозначаемый символом «1», такой, что $X \odot 1 = X$ для всякого X.
(Элемент 1 — нейтральный элемент множества относительно умножения.)

III. $X \oplus Y = Y \oplus X$ (коммутативность сложения);

IV. $X \odot Y = Y \odot X$ (коммутативность умножения);

V. $X \odot (Y \oplus Z) = (X \odot Y) \oplus (X \odot Z)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

VI. $X \oplus (Y \odot Z) = (X \oplus Y) \odot (X \oplus Z)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Для всякого X существует $\overline{X}$, такой, что

VII. $X \oplus \overline{X} = 1$;

VIII. $X \odot \overline{X} = 0$.

Элемент $\overline{X}$ называется инверсией элемента X и полностью характеризуется аксиомами VII и VIII.

Заметим, что каждой аксиоме из I — VIII, в которой фигурируют символы «$\oplus$, $\odot$, 0, 1» можно сопоставить «двойственную» аксиому из тех же аксиом I — VIII, получаемую из первой заменой указанных символов соответственно символами «$\odot$, $\oplus$ 1, 0». Каждому доказательству будет соответствовать двойственное доказательство в том же смысле.

Приведем пример двух взаимодвойственных доказательств:

$$1)\quad (X \oplus X) \odot (X \oplus \overline{X}) = X \oplus X \odot \overline{X}; \qquad \text{(VI)}$$

$$(X \oplus X) \odot 1 = X + 0; \qquad \text{(VII, VIII)}$$

$$X \oplus X = X; \qquad \text{(II, I)}$$

$$2)\quad X \odot X \oplus X \odot \overline{X} = X \odot (X \oplus \overline{X}); \qquad \text{(V)}$$

$$X \odot X \oplus 0 = X \odot 1; \qquad \text{(VIII, VII)}$$

$$X \odot X = X. \qquad \text{(I, II)}$$

Мы доказали два новых свойства операций сложения и умножения: $X \oplus X = X$ и $X \odot X = X$ (законы идемпотентности). Покажем, что алгебра высказываний является одной из моделей абстрактной булевой алгебры. Прежде всего при переходе от абстрактной алгебры к ее модели необходимо соответствующим образом истолковать объекты и операции абстрактной алгебры, т. е. составить своеобразный словарь для перевода терминов с языка абстрактной алгебры на язык ее модели.

Язык абстрактной булевой алгебры	**Язык алгебры высказываний**
Переменные A, B, C, ...	Переменные для элементарных высказываний A, B, C, ...
Равенство выражений	Эквивалентность высказываний
Сложение	Дизъюнкция
Умножение	Конъюнкция
0	Ложное высказывание
1	Истинное высказывание
Инверсия	Отрицание

При таком истолковании основных понятий (объектов и операций) абстрактной булевой алгебры все ее аксиомы удовлетворяются в алгебре высказываний, мы их находим среди свойств 05 ([1]—[17]) операций алгебры высказываний (I — [10], II — [11], III — [2], IV — [3], V — [6], VI — [7], VII — [14], VIII — [15]).

Остальные свойства логических операций следуют из аксиом I — VIII. Свойства [8] и [9] идемпотентности мы уже доказали.

Из аксиом I—VIII легко выводятся таблицы дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, а с помощью таблиц доказываются все остальные свойства (как это делается, мы уже знаем).

В качестве примера выведем из аксиом таблицу дизъюнкции.

Из I следует $1 \vee 0 = 1$,
$0 \vee 0 = 0$.

Из III—$1 \vee 0 = 0 \vee 1$, следовательно, $0 \vee 1 = 1$.

Из уже доказанного выше закона идемпотентности — ($X \vee X = X$) — $1 \vee 1 = 1$.

Так как переменные для высказываний принимают только два значения (0 и 1), мы получили полную таблицу дизъюнкции:

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

14.1. *Упражнение.* Составить таблицы конъюнкции и отрицания, исходя из аксиом I—VIII.

15. Определим объекты и операции алгебры множеств и покажем, что эта алгебра также является моделью абстрактной булевой алгебры.

Каждая научная теория изучает некоторое множество объектов и различные его подмножества. Множество всех объектов, изучаемых данной теорией, называется у н и в е р с а л ь н ы м множеством, соответствующим этой теории. Так, например, множество всех чисел является универсальным множеством, соответствующим арифметике. Универсальное множество, соответствующее некоторой (безразлично какой) теории, обозначим символом 1. Буквами $A, B, C, \ldots$ обозначим множества объектов той же теории, являющиеся подмножествами универсального множества. Приходится также вводить в рассмотрение множество, не содержащее ни одного элемента (пустое множество), которое обозначим символом 0 (раньше обозначали символом $\varnothing$).

Произвольные объекты теории обозначим малыми буквами $a, b, c, \ldots, x, \ldots$ Высказывание «объект x принадлежит множеству A» или, что то же, «объект x — элемент множества A» обозначим, как и раньше, символом «$x \in A$». Будем писать «$A = B$», если всякий элемент множества A есть элемент множества B и всякий элемент множества B есть элемент множества A. Определим над множествами следующие операции, порождающие новые множества (эти операции нам уже знакомы, запишем здесь лишь их точные определения).

а) Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, содержащее все те и только те объекты, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т. е. множество истинности дизъюнкции $(x \in A) \vee (x \in B)$.

$$A \cup B \overset{df}{=} \underset{x}{M}[(x \in A) \vee (x \in B)].$$

(Знак «$\overset{df}{=}$» обозначает «равно по определению», «*df*» от латинского *definitio* — определение.)

б) Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, содержащее все те и только те объекты, которые принадлежат и множеству A и множеству B, т. е. множество истинности конъюнкции $(x \in A) \wedge (x \in B)$

$$A \cap B \overset{df}{=} \underset{x}{M}[(x \in A) \wedge (x \in B)].$$

в) Дополнением $\overline{A}$ множества A называется множество всех тех и только тех объектов (из универсального множества), которые не принадлежат множеству A, т. е.

$$\overline{A} \overset{df}{=} \underset{x}{M}[\overline{x \in A}].$$

При соответствующем истолковании основных объектов и операций булевой алгебры с помощью объектов и операций алгебры множеств в последней выполняются все аксиомы I—VIII, а следовательно, и все теоремы булевой алгебры. Это и означает, что алгебра множеств — одна из моделей абстрактной булевой алгебры.

Составим словарь для перевода терминов с языка абстрактной булевой алгебры на язык алгебры множеств.

Язык абстрактной булевой алгебры	**Язык алгебры множеств**
Переменные $A, B, C, \ldots$	Переменные $A, B, C, \ldots$ для подмножеств одного универсального множества
Равенство выражений	Равенство множеств
Сложение	Объединение множеств
Умножение	Пересечение множеств
0	Пустое множество
1	Универсальное множество
Инверсия	Дополнение множества

15.1. *Упражнение.* Записать в символах алгебры множеств аксиомы I — VIII. Доказать выполнимость аксиом, исходя из содержательного истолкования операций алгебры множеств.

15.2. Легко заметить, что данные нами определения операций алгебры множеств устанавливают между этими операциями и операциями алгебры высказываний соответствие, переносящее все свойства 05 [1—17] операций алгебры высказываний на операции алгебры множеств.

Покажем это для свойства [17]:

$$\overline{A \cup B} = \underset{x}{M}\,[\overline{(x \in A) \vee (x \in B)}] = \underset{x}{M}\,[\overline{x \in A}) \wedge \overline{(x \in B)}] = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

15.2.1. *Упражнения:*

1) Вывести свойства операций алгебры множеств, исходя из их определений [15] и свойств 05 [1—17] операций алгебры высказываний.

2) Исходя из двух словарей перевода терминов с языка абстрактной булевой алгебры на языки алгебры высказываний и алгебры множеств, составить словарь для перевода терминов с языка алгебры высказываний на язык алгебры множеств.

15.3. Свойства операций алгебры множеств доказываются и с помощью весьма наглядной геометрической интерпретации. Приведем такое доказательство для свойства [16].

Изобразим универсальное множество с помощью множества точек некоторого прямоугольника, а его подмножества — с помощью множеств точек кругов, расположенных внутри этого прямоугольника. Определим каждое из множеств $\overline{A \cap B}$ и $\bar{A} \cup \bar{B}$. Как видно, заштрихованные множества точек на рис. 11*а* $(\overline{A \cap B})$ и 11*б* $(\bar{A} \cup \bar{B})$ состоят из одних и тех же точек прямоугольника. Эти множества равны.

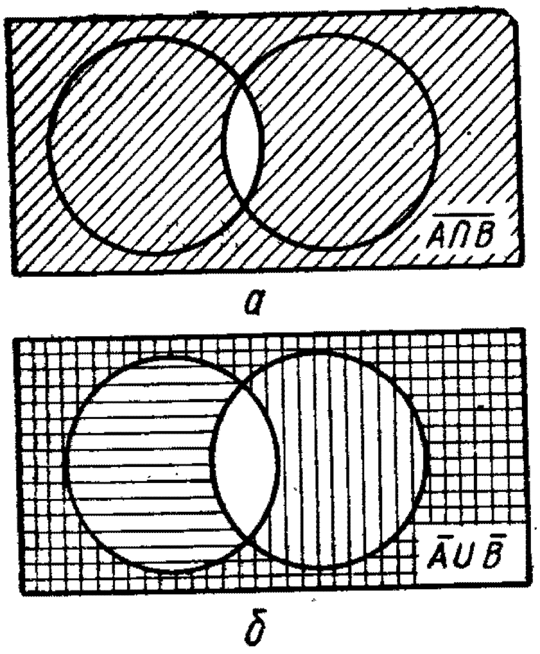


Рис. 11.

15.3.1. *Упражнение.* Доказать с помощью геометрической интерпретации свойства [6] и [7] — дистрибутивные свойства пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения.

16. Структура контактных схем, состоящих из замыкающих и размыкающих контактов, соединенных последовательно и параллельно, описывается алгеброй, также являющейся моделью булевой алгебры. (Контакт реле называется замыкающим (размыкающим), если при возбуждении обмотки реле он замыкает (размыкает) цепь.[1])

[1] Предполагается, что учащиеся знают о реле из курса физики.

Вместо языка абстрактной булевой алгебры будем пользоваться языком алгебры высказываний. Это удобно потому, что алгебра контактных схем, как и алгебра высказываний, является моделью булевой алгебры, в которой переменные принимают только два значения. Составим словарь для перевода терминов с языка алгебры высказываний непосредственно на язык алгебры контактных схем.

Язык алгебры высказываний

1. $A, B, C, \ldots$ — элементарные высказывания, каждое из которых может быть истинным или ложным. Истинному высказыванию приписывается значение 1, ложному — значение 0.

2. Дизъюнкция $A \vee B$ истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно.

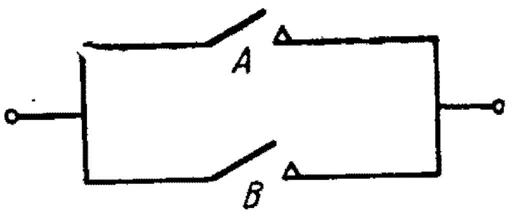


Рис. 12.

3. Конъюнкция $A \wedge B$ истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

4. Отрицание высказывания $\bar{A}$ истинно, когда A ложно и ложно, когда A истинно.

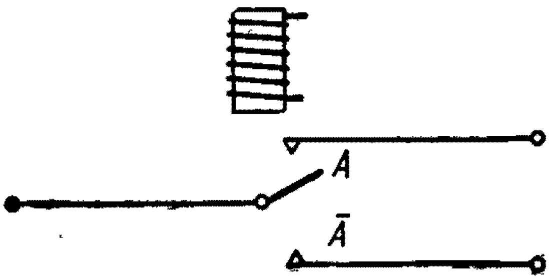


Рис. 14.

5. Сложные высказывания (функции-высказывания) эквивалентны, если при любых одинаковых наборах значений входящих в них переменных они принимают равные значения, т. е. одновременно истинны или ложны.

Язык алгебры контактных схем

1. $A, B, C, \ldots$ — контакты, каждый из которых может быть замкнутым или разомкнутым. Замкнутому контакту приписывается значение 1, разомкнутому — значение 0.

2. Параллельное соединение контактов A и B замкнуто тогда и только тогда, когда хотя бы один из контактов A или B замкнут (рис. 12).

Рис. 13.

3. Последовательное соединение контактов A и B замкнуто тогда и только тогда, когда оба контакта замкнуты (рис. 13).

4. Размыкающий контакт $\bar{A}$ реле замкнут, когда замыкающий контакт A этого реле разомкнут, и разомкнут, когда контакт A замкнут. Контакт $\bar{A}$ называется инверсией контакта A (рис. 14).

5. Контактные схемы эквивалентны, если при любых одинаковых наборах значений (состояний) входящих в них контактов они принимают равные значения, т. е. одновременно замкнуты или разомкнуты.

Выполнимость свойств 05[1—15] в алгебре контактных схем очевидна. Это следует из того, что последовательное, параллельное соединения контактов и инверсия контакта характеризуются, как это видно из словаря, теми же таблицами, что и конъюнкция, дизъюнкция и отрицание соответственно.

Можно, разумеется, и непосредственно убедиться в справедливости этих свойств. Например, для доказательства выполнимости свойства [7] $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ достаточно построить схемы, соответствующие левой и правой частям этого равенства и убедиться в эквивалентности этих схем (рис. 15).

16.1. Описанное выше соответствие сопоставляет каждую логическую функцию, выраженную с помощью элементарных высказываний, их отрицаний, знаков дизъюнкции и конъюнкции, с контактной схемой, составленной из контактов и их инверсий с помощью параллельных и последовательных соединений.

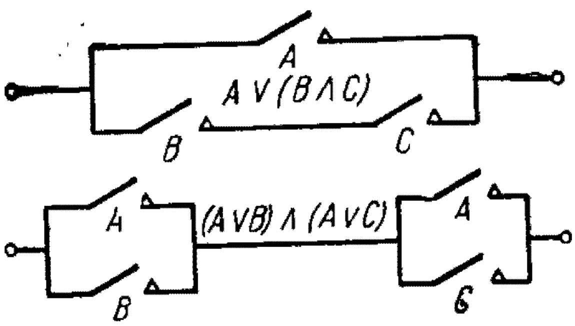


Рис. 15.

Такие схемы называются «П-схемами», или схемами «класса П». Таким образом, очевидно, каждой схеме класса П соответствует формула алгебры высказываний, составленная из элементарных высказываний и их отрицаний с помощью знаков дизъюнкции и конъюнкции. Эта формула называется *структурной формулой* схемы.

Описанное соответствие является основой применения алгебры высказываний (или вообще булевой алгебры) к решению задач анализа, упрощения и синтеза контактных схем.

Анализ схемы, т. е. определение условий работы (замыкания и размыкания) данной схемы, сводится к определению значений логической функции, выражаемой структурной формулой, при всевозможных наборах значений аргументов, а упрощение схемы — к упрощению структурной формулы. Синтез схемы, т. е. конструирование схемы по заданным условиям ее работы, сводится к составлению структурной формулы по ее таблице.

Приведем пример синтеза схемы.

Задача. Из трех контактов A, B, C составить схему с одним входом и одним выходом со следующими условиями работы: на выходе появляется сигнал (загорается лампочка), если хотя бы два из трех контактов A, B, C замкнуты.

Практическое применение этой схемы возможно, например, для контроля за работой какого-либо устройства, состоящего из трех агрегатов, каждый из которых, если работает, замыкает один из контактов A, B, C, а если не работает, размыкает его, причем по условиям работы устройства требуется, чтобы всегда действовали хотя бы два из трех агрегатов.

По заданным условиям работы схемы можем составить таблицу значений соответствующей логической функции или выражающей ее формулы — структурной формулы схемы.

A	B	C	$f(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Исходя из табличного задания функции, можем записать ее с. д. н. ф.— структурную формулу схемы:

$$f(A, B, C) = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC.$$

Очевидно, что наиболее экономичную схему получим, если исходить из минимальной формы этой функции. Для данной функции мы уже находили минимальную д. н. форму [13]:

$$f(A, B, C) = BC \vee AC \vee AB.$$

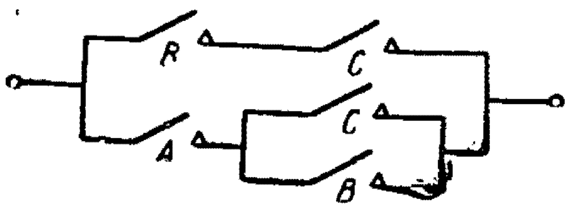


Рис. 16.

Вынесением за скобки можем еще уменьшить число букв на одну:

$$f(A, B, C) = BC \vee A(C \vee B).$$

Получаем следующую схему (рис. 16).

16.1. *Упражнение.* Из трех контактов A, B, C и их инверсий составить схему с одним входом и одним выходом так, чтобы она замыкалась тогда и только тогда, когда замкнуты не более двух из трех контактов A, B, C.

17. Огромные скорости выполнения различных операций в современных электронных вычислительных машинах достигнуты за счет применения электронных схем, работающих в тысячи раз быстрее, чем соответствующие релейно-контактные схемы.

В электронных схемах применяются электронные лампы или полупроводниковые приборы, реализующие основные логические операции.

Не касаясь физических основ и структуры этих устройств, называемых **функциональными элементами**, опишем их лишь с функциональной точки зрения. В этих устройствах значения истинности моделируются с помощью сигналов двух сортов: 1 — положительный импульс, или уровень высокого напряжения, 0 — отрицательный импульс, или уровень низкого напряжения.

Устройство, реализующее отрицание (обозначим его условно символом «$\rightarrow\boxed{\text{не}}\rightarrow$»), имеет один вход и один выход. На выходе появляется импульс (положительный или отрицательный), если на вход подан импульс (отрицательный или положительный).

Устройство, реализующее дизъюнкцию (обозначим его условно символом «$\rightrightarrows\boxed{\text{или}}\rightarrow$»), имеет два или более входов и один выход. На выходе появляется импульс тогда и только тогда, когда хотя бы на один из входов поступает импульс.

Устройство, реализующее конъюнкцию (обозначим его условно символом «$\rightrightarrows\boxed{\text{и}}\rightarrow$»), имеет два или более входов и один выход. На выходе появляется импульс тогда и только тогда, когда на все входы поступают импульсы.

В качестве примера применения алгебры высказываний к синтезу электронных схем из указанных выше функциональных элементов рассмотрим задачу синтеза одноразрядного двоичного сумматора на три входа.

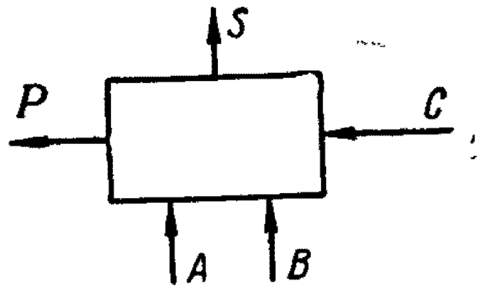


Рис. 17.

Сумматор (главная часть арифметического устройства электронной вычислительной машины), выполняющий сложение многозначных двоичных чисел, представляет собой последовательное соединение одноразрядных двоичных сумматоров, осуществляющих сложение в каждом разряде и перенос в старший разряд, если такой перенос возникает.

Задача состоит в конструировании с помощью функциональных элементов такой схемы с тремя входами A, B, C и двумя выходами S и P, чтобы при подаче на двух входах, например A и B, сигналов, изображающих двоичные цифры (положительный импульс — 1, отрицательный — 0), т. е. слагаемые данного разряда, а на входе C сигнала — перенос из соседнего младшего разряда, получить на выходе S значение суммы в данном разряде, а на выходе P — значение переноса в соседний старший разряд (рис. 17).

Воспользуемся таблицей сложения в двоичной системе счисления:

A	B	C	S	P
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Так как A, B, C принимают только значения 0 и 1, а S и P принимают эти же значения, то, как видно из таблицы, S и P могут быть выражены как логические функции от A, B и C. С помощью приведенной таблицы мы легко составляем с. д. н. ф. этих функций:

$$S(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC, \tag{1}$$

$$P(A, B, C) = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC. \tag{2}$$

Для (2) мы уже знаем минимальную форму:

$$P(A, B, C) = BC \vee AC \vee AB.$$

Ввиду того, что схему необходимо составить из функциональных элементов, возникает задача такого упрощения формулы S, при котором она содержала бы как можно меньше знаков операций. Очевидно, уменьшение числа отрицаний можно получить приведением формулы к такому виду, чтобы знаки отрицания распространялись на более длинные выражения. Так, используя свойства 05[16], [17], получаем

$$S(A, B, C) = ABC \vee \overline{(A \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C)}.$$

Для упрощения выражения, стоящего под знаком отрицания, преобразуем его в дизъюнкцию, т. е. раскроем скобки. Это можно выполнить следующим образом: берем каждую букву из первой пары скобок и составляем с ней отличные от 0 конъюнкции, содержащие по одной букве из второй и третьей пары скобок. Получаем: $A\bar{B}C \vee ABC \vee AC \vee AB \vee BC \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и, применяя закон склеивания 05[19],— $AC \vee AB \vee BC \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

$$S(A, B, C) = ABC \vee \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee AB \vee AC \vee BC} = ABC \vee$$

$$\vee (A \vee B \vee C)\,\overline{AB \vee AC \vee BC}.$$

Таким образом, принимая

$$S = ABC \vee (A \vee B \vee C) \cdot \overline{AB \vee AC \vee BC} \text{ и}$$

$$P = BC \vee AC \vee AB,$$

получаем следующую схему одноразрядного двоичного сумматора на три входа (рис. 18).

18. Разъясним на одном примере применение логики высказываний при решении задачи постановки диагноза в медицине. Пример, который мы приводим ниже, сравни-

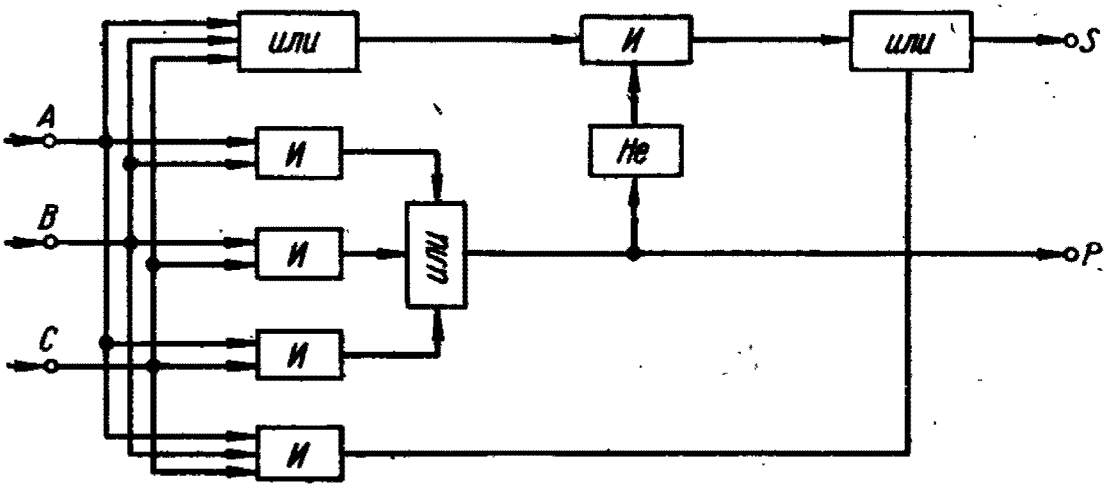


Рис. 18.

тельно простой, и задача постановки диагноза в подобных случаях (с тремя болезнями и тремя симптомами) решается без особых затруднений врачом. Но анализ логической структуры рассуждения врача при постановке диагноза и ее обобщение (на случай n болезней и m симптомов, связанных определенными логическими связями) позволяют получить общую логическую схему постановки диагноза для большого числа болезней и симптомов, которая может быть запрограммирована для того, чтобы задачу постановки диагноза передать для решения электронной вычислительной машине.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеются следующие сведения о трех болезнях b_1, b_2 и b_3 и трех симптомах c_1, c_2 и c_3:

1) у больного, страдающего по крайней мере одной из болезней b_1, b_2, b_3, имеется хотя бы один из симптомов c_1, c_2, c_3;

2) если больной страдает болезнью b_2, но не страдает болезнью b_3, то обнаруживаются у него симптомы c_1 и c_3 или не обнаруживается c_1;

3) у больного, страдающего болезнью b_1, но не страдающего болезнью b_3, обнаруживается симптом c_2;

4) у больного, страдающего болезнью b_3, но не страдающего болезнью b_2, обнаруживается симптом c_2, но не обнаруживается симптом c_1;

5) если у больного обнаруживается симптом c_1 и он страдает болезнью b_1 или не страдает ни одной из болезней b_1, b_2, b_3, то у него обнаруживается и симптом c_2. Задача определения диагноза ставится на основе симптомов c_1, c_2, c_3 и условий 1—5.

Решение поставленной задачи состоит в том, чтобы из определенных посылок, состоящих из условий 1—5 и высказывания о симптомах, обнаруженных у данного больного, вывести заключение о том, какой болезнью или какими возможными болезнями он страдает.

Переведем поставленную задачу на язык алгебры высказываний.

Пусть B_i $(i = 1, 2, 3)$ — высказывание «больной страдает болезнью b_i», а C_i $(i = 1, 2, 3)$ — высказывание «у больного обнаруживается симптом c_i».

Тогда условия 1—5 выразятся следующим образом:

$$B_1 \vee B_2 \vee B_3 \to C_1 \vee C_2 \vee C_3; \qquad (1)$$

$$B_2 \cdot \overline{B_3} \to C_1 C_2 \vee \overline{C}_1; \qquad (2)$$

$$B_1 \cdot \overline{B}_3 \to C_2; \qquad (3)$$

$$B_3 \cdot \overline{B}_2 \to C_2 \cdot \overline{C}_1; \qquad (4)$$

$$(B_1 \vee \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) \cdot C_1 \to C_2. \qquad (5)$$

Каждое из высказываний (1)—(5) считается истинным (это дано по условию), следовательно, и их конъюнкция тоже истинное высказывание, т. е.

$$(B_1 \vee B_2 \vee B_3 \to C_1 \vee C_2 \vee C_3)(B_2\overline{B}_3 \to C_1C_2 \vee \overline{C}_1)(B_1\overline{B}_3 \to C_2)$$
$$[(B_1 \vee \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)\, C_1 \to C_2] = 1.$$

Выразив импликации через дизъюнкцию и отрицание и произведя возможные упрощения, получаем:

$$(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3 \vee C_1 \vee C_2 \vee C_3)(\overline{B}_2 \vee B_3 \vee C_2 \vee \overline{C}_1)(\overline{B}_1 \vee B_3 \vee C_2) \times$$
$$\times (\overline{B}_3 \vee B_2 \vee \overline{C}_1 \cdot C_2)(\overline{B}_1 B_2 \vee \overline{B}_1 B_3 \vee \overline{C}_1 \vee C_2) = 1.$$

Полученное равенство играет роль «диагностического уравнения» для данного случая трех болезней b_1, b_2, b_3 и трех симптомов c_1, c_2, c_3, связанных условиями (1)—(5).

Постановка диагноза состоит в решении этого логического уравнения относительно высказываний B_1, B_2, B_3 при заданных значениях истинности высказываний C_1, C_2, C_3.

Пусть, например, у больного обнаружен симптом c_1, но не обнаружены симптомы c_2 и c_3. Подставляя в уравнение значения истинности $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$, получаем:

$$(\overline{B}_2 \vee B_3)(\overline{B}_1 \vee B_3)(B_2 \vee \overline{B}_3)(\overline{B}_1B_2 \vee \overline{B}_1B_3) = 1;$$

$$(B_3 \vee \overline{B}_1\overline{B}_2)(B_2 \vee \overline{B}_3)(\overline{B}_1B_2 \vee \overline{B}_1B_3) = 1;$$

$$(B_2B_3 \vee \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)(\overline{B}_1B_2 \vee \overline{B}_1B_3) = \overline{B}_1B_2B_3 = 1.$$

Из $\overline{B}_1B_2B_3 = 1$ следует $B_1 = 0$, $B_2 = B_3 = 1$, т. е. больной страдает болезнями b_2 и b_3, но не страдает болезнью b_1.

В этом случае при заданном наборе значений истинности высказываний C_1, C_2, C_3 мы получили точный диагноз. Однако это возможно не во всех случаях. В отдельных случаях решение диагностического уравнения получается в виде дизъюнкции (например, больной страдает болезнью b_1 или болезнью b_2). В таких случаях требуется уточнение диагноза, которое достигается уже другими средствами, в частности, применением теории вероятностей и статистических методов.

19. Мы уже знаем, что логика высказываний оказывается недостаточной в качестве логического языка для математики.

Для обеспечения потребностей математики в соответствующем логическом языке в математической логике строится более широкая логическая система — л о г и к а п р е д и к а т о в, содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

Это расширение логического аппарата достигается в результате проникновения во внутреннюю логическую структуру элементарных высказываний, их расчленения на составные части.

19.1. Здесь необходимо повторить понятия предиката (одноместного и двухместного), кванторов общности и существования, правило отрицания высказываний всеобщности и существования (гл. 5, § 12; гл. 6, § 10).

Эти сведения могут быть дополнены примерами простейших правил вывода:

$$\frac{(x)P(x)}{(\exists x)P(x)} \text{ и } \frac{(x)P(x)}{P(a)}$$

(a — название объекта), которые легко обосновываются, исходя из смысла кванторов.

19.2. В рамках логики предикатов можно уточнить отношение логического следования для случая элементарных высказываний. Ограничимся элементарными высказываниями, выражающими свойства предметов (одноместными предикатами).

Логическая функция $Q(x)$ следует из $P(x)$, если любая подстановка вместо x названия определенного объекта, обращающая $P(x)$ в истинное высказывание, обращает и $Q(x)$ в истинное высказывание, иначе говоря, если множество истинности $P(x)$ включается в множество истинности $Q(x)$.

В этом и только в этом случае истинна импликация

$$(x)\,[P(x) \to Q(x)],$$

поэтому истинность этой импликации можно принять за определение следования $Q(x)$ из $P(x)$.

Например, из функции-высказывания «четырехугольник x — ромб» (1) следует функция-высказывание «четырехугольник x — параллелограмм» (2), так как множество истинности (1) (ромбов) включается в множество истинности (2) (параллелограммов).

Из уравнения «$x - 1 = 2$» (3) следует уравнение «$(x-1) \times (x+1) = 2(x+1)$» (4), так как множество истинности логической функции (3) включается в множество истинности логической функции (4). Так как

$$\underset{x}{M}[x - 1 = 2] \subset \underset{x}{M}[(x-1)(x+1) = 2(x+1)],$$

то импликация

$$(x - 1 = 2) \to [(x-1)(x+1) = 2(x+1)]$$

тождественно истинна.

ЧАСТЬ II

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ

Глава 1. О логической строгости в математике и в преподавании

01. Понятие логической строгости возникло и развивалось в математике вместе с аксиоматическим методом, от которого оно неотделимо.

Первая из математических теорий, которая получила логическое построение, была, как известно, геометрия. Основные требования к построению геометрии как дедуктивной науки были сформулированы древнегреческим философом Аристотелем (384—322 гг. до н. э.), основоположником формальной логики. По схеме Аристотеля геометрия должна начинаться с установления свойственных ей категорий, т. е. основных объектов, не подлежащих определению, и исходных истин, аксиом, не подлежащих доказательству. Все остальное в геометрии должно быть получено логическим выводом из этих исходных предпосылок. Однако осуществить такое построение оказалось задачей весьма трудной. Несмотря на многочисленные попытки, эта задача получила удовлетворительное решение лишь через два тысячелетия.

По дедуктивной схеме Аристотеля стремился построить геометрию один из выдающихся древнегреческих математиков Евклид (около 300 г. до н. э.) в своих знаменитых «Началах». В течение более двух тысяч лет «Начала» Евклида считались непревзойденными по строгости обоснования геометрии. Таким образом, вплоть до XIX века образцом, эталоном логической строгости в математике служило изложение геометрии в евклидовых «Началах».

Однако задачу аксиоматического построения геометрии Евклид по существу не решил, так как принятая им система исходных истин (постулатов и аксиом) оказалась недостаточной базой для чисто логического развертывания геометрической теории. Поэтому евклидовы доказательства, многие из которых воспроизводятся и в современных школьных учебниках геометрии, представляют собой пеструю смесь интуиции и логики.

XIX век ознаменовался выдающимся достижением в области геометрии — созданием Н. И. Лобачевским новой, неевклидовой, геометрической системы. Ввиду того, что положения этой системы в отличие от положений евклидовой геометрии противоречат привычным пространственным представлениям, естественно возникла проблема доказательства ее внутренней непротиворечивости. Наука первой половины XIX века еще не владела средствами для осуществления такого доказательства. Это послужило стимулом к глубоким исследованиям в области оснований геометрии, приведшим к новому этапу в развитии аксиоматического метода, к новому эталону логической строгости в математике. Эталон логической строгости, сложившийся к концу XIX века, господствует и в современной математике.

Эти исследования привели, в частности, к решению проблемы аксиоматического построения евклидовой геометрии Давидом Гильбертом, впервые построившим в своем труде «Основания геометрии» (1899) систему аксиом, пригодную в качестве базы для логического развертывания евклидовой геометрии и указавшим основные принципы доказательства этой пригодности.

02. Современный аксиоматический метод и связанный с ним эталон строгости в математике основаны на идеях и методах, разработанных математической логикой и теорией множеств.

02.1. От Евклида до Гильберта считали, что дедуктивное, или аксиоматическое, построение теории определяется заданием системы аксиом этой теории, и не заботились об уточнении тех логических средств вывода, которыми мы пользуемся в развертывании теории на базе заданной аксиоматики. Когда говорили, что все предложения теории выводятся из некоторых положений, принятых за аксиомы, «чисто логическим путем», не знали, каков точный смысл выражения «чисто логическим путем», считая его интуитивно ясным. Однако состав выводимых из аксиом предложений теории (теорем) существенно зависит не только от заданной системы аксиом, но и от тех средств логического вывода, которыми мы пользуемся в доказательствах теорем. Одно и то же предложение, выраженное в терминах данной теории, может быть не выводимым из данной аксиоматики с помощью одних средств и выводимым с помощью других средств логического вывода.

Математическая логика восполнила этот пробел. Она разработала современное понятие дедуктивной системы, включающей наряду с системой специфических аксиом развиваемой теории систему логических аксиом и исходных правил вывода, определяющих логический язык этой теории.

Таким образом, современный аксиоматический метод предполагает более высокую ступень формализации. Если раньше, в догильбертовский период, формализации в аксиомах подлежали лишь основные свойства специфических отношений объектов, изучаемых данной теорией, то теперь подлежат формализации и средства, которыми из одних свойств этих отношений, составляющих содержание аксиом, выводятся другие свойства, составляющие содержание теорем этой теории.

Выражение «чисто логическим путем» для каждой дедуктивно построенной математической теории получает точный смысл. Теория оформляется в виде логико-математического исчисления. В ней можно различать два сорта терминов: принадлежащие логике (логические термины) и принадлежащие данной теории (специфические термины). Логические термины снабжают математическую теорию формой, языком, специфические — содержанием.

02.2. В попытках аксиоматического построения геометрии от Евклида до Гильберта усматривалось лишь стремление к логической организации этой теории, т. е. к представлению ее в виде последовательности предложений, каждое из которых обосновывается предыдущими и вместе с ними обосновывает последующие. Аксиоматический метод, возникший в геометрии, впоследствии распространился и на другие математические теории, но при этом не ограничился только логической организацией теории.

Вторая сторона современного аксиоматического построения математических теорий основана на теоретико-множественных идеях. С теоретико-множественной точки зрения каждая математическая теория описывает некоторое множество объектов, причем это описание касается не конкретной природы объектов, а отношений между ними. Некоторые свойства этих отношений, не затрагивающие их конкретный смысл, фиксируются в виде аксиом, другие выводятся из них логическими средствами.

Ввиду того, что при таком построении теории не учитывается ни конкретная природа объектов, ни конкретный смысл отношений между ними, в результате получается абстрактная теория, описывающая множества объектов неопределенной природы или, точнее, множества объектов различной конкретной природы, имеющие одну и ту же структуру, которая и является предметом данной теории. Каждое из этих множеств объектов конкретной природы называется моделью или реализацией этой абстрактной теории. (Иногда под конкретной моделью абстрактной теории понимают не множество объектов конкретной природы, а теорию, описывающую это множество.)

Одна и та же абстрактная математическая теория имеет различные конкретные модели и с этой точки зрения она многозначна, или поливалентна. Так, например, различными моделями абстрактной булевой алгебры являются алгебра высказываний, алгебра множеств, алгебра контактных схем.

Сила и эффективность абстрактной математической теории — в ее многозначности. Аксиомы и теоремы абстрактной математической теории переводятся в истинные высказывания в любой модели этой теории. Доказав один раз теорему в абстрактной теории, мы можем использовать ее в различных моделях теории.

В множествах, описываемых одной и той же абстрактной теорией, но внешне различных по природе объектов и смыслу отношений между ними, обнаруживается глубокая аналогия — эти множества изоморфны, они имеют одинаковую структуру. На этом глубоком сходстве основано применение аппарата одной абстрактной математической теории (например, булевой алгебры) в различных областях науки и техники (в логике, в теории множеств, в теории и практике конструирования автоматических устройств и др.).

Понятия модели, изоморфизма, многозначности лежат в основе внедрения математических методов во все новые и новые области человеческой деятельности. Только на базе этих идей можно понять действительное значение современного аксиоматического метода.

03. Когда речь идет об основаниях и методе построения науки, нельзя обойти философские вопросы.

Как всякое новое достижение науки, развитие аксиоматического метода в математике и связанное с этим достижение нового, более высокого уровня логической строгости вызвали новые попытки идеалистической философии укрепить свои шаткие позиции в вопросе истолкования предмета математики.

Еще со времен Лейбница идеалистическая философия пыталась доказать, что математические истины являются по существу истинами общелогического характера, а не фактическими истинами, говорящими что-то о вещах окружающего нас мира. Представление современных аксиоматических теорий в сильно формализованном виде логико-математических исчислений послужило стимулом к возобновлению этих попыток в философской школе логицизма, возглавляемой Бертраном Расселом. Свое идеалистическое истолкование предмета математики логицисты строят на основе попытки сведения всей математики к логике и идеалистическому истолкованию последней.

Однако достижения науки опровергают доводы логицистов. Результаты, полученные в исследованиях по основаниям математики австрийским ученым Геделем (1932), доказывают, в частности, невозможность сведения арифметики натуральных чисел к логике. С другой стороны, сама логика — продукт нашего опыта. Она подготовлена тысячелетней практикой человечества, и если сейчас признано полезным и логику строить аксиоматически, то ее аксиоматика (как и в других науках) может быть составлена только как схематизация почерпнутых из практики правил рассуждений. В. И. Ленин говорит: «Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом».[1]

Парижский профессор Лоран Шварц, принадлежащий к группе выдающихся математиков, объединившихся под коллективным псевдонимом Бурбаки, не признает за настоящую математику все то, что было создано до Гильберта, т. е. что не соответствует современному уровню строгости. Он считает математику игрой, определяемой правилами, фиксированными в аксиомах, которые математик может выбрать произвольно, по своему вкусу, соблюдая лишь требование непротиворечивости, чтобы потом играть по этим правилам.[2] Эти высказывания противоречат его собственной деятельности. Наряду с академиком С. Л. Соболевым он — один из создателей теории обобщенных функций, вызванной к жизни потребностями физики.

Гильберт, провозгласивший новый эталон строгости, был вынужден признать, что аксиомы геометрии выражают «определенные, связанные друг с другом основные результаты нашего опыта».[3]

Образцом идеалистической путаницы может служить смехотворное истолкование математики, содержащееся в выступлении одного из участников состоявшегося в Париже

---

[1] В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1947, стр. 164.
[2] Гуго Штейнгауз. О математической строгости. «Математика в школе», 1960, № 1.
[3] Д. Гильберт. Основания геометрии. М., 1948, стр. 56.

в 1955 г. международного коллоквиума по математической логике на тему: «Рассуждение в математике и в экспериментальных науках».[1] Порте заявил, что «...математика — это мир фикций. Можно спросить, почему эти фикции полезны физику для понимания реального мира. Действительно, имеется определенная «адекватность», определенное сходство между фиктивными объектами математики и реальными объектами физики. Откуда эта адекватность? В основном от того, что фикции выдуманы с этой целью». Очевидно, здравомыслящему человеку трудно понять подобное «объяснение». В действительности адекватность абстрактных математических понятий конкретным физическим объектам происходит от того, что исходные, первоначальные математические понятия абстрагированы от конкретных физических объектов, поэтому и остальные понятия и положения развертываемой на базе исходных абстрактной математической теории согласуются с реальным миром.

Математики замечают, что некоторые конкретные системы (механические, электрические, биологические и т. д.), какими бы различными они ни казались, имеют определенное сходство в структуре и свойствах отношений между объектами. Затем начинают абстрагировать и изучать структуру связей в множестве, лишенном частных характеристик различных исходных конкретных систем. Так рождается абстрактная теория, систематизирующая множество конкретных систем, становящихся ее моделями. Логически модель появляется после теории, психологически она предшествует абстрактной теории. (Разумеется, математическая теория может получиться и как результат абстракции от одной конкретной системы, как например, абстрактная система евклидовой геометрии.)

Приведенные выше и другие неправильные истолкования математики объясняются, в частности, тем, что в них математическая теория рассматривается ограниченно, в одном лишь аспекте, логическое построение отрывается от реальной основы, на которой оно выросло, и от приложений.

Французский математик Фреше в своем докладе «Общий анализ и вопрос об основаниях»[2] причисляет себя к тем математикам, которые правильно оценивают значение конкретных задач, поставленных природой и техникой математике. Он различает в каждой математической отрасли четыре аспекта: 1) накопление фактов, которое он называет индуктивным синтезом; 2) выделение из накопленного материала первона-

[1] Сб. „Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales". Paris, 1958.

[2] Сб. „Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la methode des sciences mathématiques". Zurich, 1941.

чальных понятий и системы аксиом; 3) дедуктивное построение теории, основанное на этих первоначальных понятиях и аксиомах, и 4) проверка теорем этой теории на конкретных моделях.

То же самое американский математик У. Феллер[1] вкладывает в три аспекта теории: 1) интуитивную основу, 2) формальное логическое содержание и 3) приложения.

Совершенно ясно, что именно подмена всей математики ее одним формальным, логическим содержанием позволила Расселу прийти к своему известному афоризму, что «в математике мы не знаем ни о чем говорим, ни верно ли то, что мы говорим». Рассматривая математику как соединение всех указанных выше аспектов, мы можем с полным правом сказать, что в ней мы знаем и о чем говорим, и верно ли то, что мы говорим.

04. Вопрос о логической строгости в школьном обучении математике, об отражении аксиоматического метода в школьном преподавании уже давно является предметом дискуссии как у нас, так и за рубежом.

Не имея возможности детально изложить здесь историю вопроса, ограничимся лишь краткой характеристикой основных выдвигаемых предложений.

04.1. Прежде всего следует отметить, что так же, как в науке, вопрос об аксиоматическом методе в школьном обучении касался исключительно преподавания геометрии. До сих пор преподавание алгебры в школе ведется на более низком логическом уровне, чем преподавание геометрии, к тому же при исследовании проблемы развития логического мышления учащихся в процессе изучения математики на первый план в силу устаревших традиций выдвигается геометрия.

Дискуссия по вопросу о внедрении аксиоматического метода в школьном обучении геометрии свелась в основном к трем предложениям:

1) сделать систематический курс геометрии аксиоматическим, четко отделив его от пропедевтического курса с широким использованием опыта и основанной на нем интуиции;

2) не отделять логику от интуиции ни на каком этапе обучения, а правильно сочетать их, по-разному на разных ступенях обучения;

3) построить в аксиоматическом стиле небольшой фрагмент геометрической теории в старших классах, чтобы на этом материале знакомить учащихся с аксиоматическим методом, а весь курс геометрии строить так, как предлагается во

---

[1] W. Feller. Introduction to Probablity, vol. I. New-Jork, 1957.

втором предложении. Следует отметить, что первое из них имеет наименьшее число сторонников.

04.2. Аналогичные предложения по рассматриваемой проблеме выдвигаются и за рубежом, причем, как и у нас, первое из них находит наименьшее, особенно в среде педагогов, число сторонников.

05. Рассмотрим установившуюся у нас практику преподавания с точки зрения логической строгости и отражения аксиоматического метода в обучении.

05.1. В области геометрии, с одной стороны, общеизвестны затруднения, встречающиеся учащимся в начальной стадии обучения в связи с обилием логических доказательств, которые они вынуждены заучивать, не понимая еще ни необходимости в доказательстве, ни идей самого доказательства. С другой стороны, уровень традиционного обучения геометрии в старших классах не обеспечивает понимания учащимися логической структуры курса. Имеется недостаточное различие в методах и уровне преподавания геометрии в VI—VII и IX — X классах, и этот уровень слишком высок и недоступен для учащихся VI — VII классов (из-за отсутствия предварительной подготовки) и слишком низок для учащихся старших классов.

Трудности в усвоении учащимися начал геометрии вызываются отчасти узостью интуитивной основы курса и недостаточной их подготовкой к пониманию необходимости логического доказательства. Потребность в доказательстве не приходит сама по себе, понимание этой потребности является результатом воспитания.

В педагогических кругах говорят, что на вопрос «чем вы занимались на уроке геометрии?» ученик VI класса ответил: «Учитель нарисовал на доске два равных треугольника и долго доказывал, что они равны». Этот ответ очень хорошо характеризует дефект ныне действующей организации и методики обучения геометрии.

По существу мы начинаем изучать геометрию в VI классе вместо того, чтобы начинать в I классе. Работа, проводимая в рамках ныне действующей программы по арифметике в начальных классах, совершенно недостаточна. Поэтому в VI классе мы проводим работу, соответствующую трем различным уровням:

1) знакомим учащихся с геометрическими фигурами, добиваясь, чтобы они их распознавали по внешнему виду, по форме;

2) изучаем свойства фигур, добиваясь, чтобы учащиеся распознавали фигуры по их свойствам;

3) логически выводим одни свойства из других и даем соответствующие определения фигурам.

Не слишком ли много «обрушивается» на головы шестиклассников?

Для исследования вопроса о лучшей организации обучения геометрии и усовершенствовании методики преподавания необходимо использовать понятие уровня мышления в области геометрии. Это — сложное понятие, включающее определенный уровень общности, абстракции и строгости обоснования изучаемого материала. Каждому уровню мышления свойствен свой язык, состоящий из определенных геометрических и логических терминов. При переходе от одного уровня к другому, высшему, этот язык расширяется, поэтому люди, рассуждающие об одном и том же, но на различных уровнях, не могут понять друг друга, так как говорят по существу на различных языках. Развитие, ведущее к более высокому уровню, протекает в основном как процесс обучения. Поэтому возможно и необходимо, чтобы преподавание было направлено на ускорение этого развития. Метод преподавания может ускорить переход от одного уровня к следующему, но не может осуществить переход от одного уровня к другому с пропуском промежуточного уровня. В таком случае учитель и ученик будут мыслить на различных уровнях и не поймут друг друга.

Очевидно, метод преподавания может и задерживать переход к более высокому уровню мышления или привести к тому, что учащиеся вообще не достигнут его. Таким образом, применяемые на этом уровне способы мышления останутся недоступными ученикам.

В области геометрии различают пять уровней мышления.[1] Самый низкий уровень, нулевой, характеризуется тем, что геометрические фигуры здесь рассматриваются как целые и различаются по своему внешнему виду, по форме. Если показать первокласснику ромб, прямоугольник, квадрат, параллелограмм и сообщить ему соответствующие названия, после нескольких повторений он сможет безошибочно распознавать эти фигуры исключительно по их форме, не видя при этом в ромбе параллелограмм и в квадрате прямоугольник. На этом уровне ромб противопоставляется параллелограмму, квадрат — прямоугольнику.

На следующем уровне, первом, происходит анализ воспринимаемых фигур, в результате которого выявляются их свойства. На этом уровне геометрические фигуры выступают как

---

[1] P.-H. van Hiele. La penseé de l'enfant et la géometrie. „Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathematique de l'Enseignement Public", 1959, № 198.

носители определенных свойств и распознаются по этим свойствам, которые логически еще не упорядочены. Этот уровень мышления не включает в себя структуру логического следования. Фигуры только описываются, но не определяются, свойства их устанавливаются исключительно экспериментальным путем.

Очевидно, что эти два уровня доступны учащимся начальных классов (7—10 лет). Это необходимо учесть при составлении программы и разработке методики преподавания начальной геометрии.

На следующем, втором, уровне происходит логическое упорядочение свойств фигур и самих фигур. Одно или несколько свойств принимаются за определяющие фигуру, другие свойства этой фигуры устанавливаются логическим путем. Геометрические фигуры выступают уже в определенной логической связи, устанавливаемой с помощью определений. Но собственное значение дедукции на этом уровне еще не постигается учащимися (11—14 лет) ввиду того, что они еще не в состоянии охватить своим пониманием дедуктивную систему в целом. Здесь учащимся может быть разъяснено лишь значение дедукции «в малом», или «локально», т. е. в области изучения одной фигуры, а именно то, что дедукция позволяет нам сократить эксперимент, обнаружив экспериментально одни свойства и выведя другие из обнаруженных путем рассуждений, что логический вывод является общим, точным и объективным, чем он коренным образом отличается от вывода с помощью эксперимента.

На следующем, третьем, уровне постигается значение дедукции «в целом», т. е. от понимания ее в малом переходят к пониманию ее значения как способа построения и развития всей геометрической теории. Этому переходу способствует разъяснение сущности аксиом, определений, теорем, логической структуры доказательств, анализ логической связи понятий и предложений. Этот уровень вполне доступен учащимся VIII — X классов (15—17 лет).

На самом высоком (в настоящее время), четвертом (в действительности пятом, так как счет с нулевого), уровне[1] отвлекаются от конкретной природы объектов и конкретного смысла отношений между ними, т. е. развивают теорию вне всякой ее конкретной интерпретации. Этот уровень мышления в области геометрии соответствует современному (гильбертовскому) эталону строгости.

Необходимо отметить, что на каждом этапе обучения можно выявить основной уровень, на котором ведется обуче-

---

[1] В упомянутом докладе Ван Хиле описывает только первые 4 уровня.

ние, а также элементы соседних в данной последовательности уровней. Это объясняется тем, что переход от одного уровня к следующему происходит постепенно, т. е. элементы более высокого уровня появляются до того, как осуществлен переход к этому уровню, и после этого мы часто возвращаемся к более низкому уровню с целью обеспечения лучшего понимания.

Вернемся сейчас к анализу установившейся у нас практики преподавания геометрии. В ней обучение на всех этапах ведется на втором уровне, с элементами первого уровня в VI — VII классах и некоторыми элементами третьего уровня в старших классах. Третий уровень полностью не достигается. Оканчивающие среднюю школу не знают, в чем сущность дедуктивного построения геометрии, не понимают роль аксиом и определений в этом построении.

Мы опросили около 200 учащихся X классов. На вопрос, что они понимают под аксиомой, все опрашиваемые ответили примерно так: «Аксиома — истина или предложение, не требующая доказательства». На вопрос, почему аксиома не требует доказательства, учащиеся ответили: «Потому, что она очевидна». Когда же им назвали целый ряд теорем, не менее очевидных, чем известные им аксиомы, но которые, однако, «требуют» доказательства, учащиеся ничего не могли ответить.

На вопрос, можно ли определять все геометрические понятия, учащиеся ответили утвердительно, а в качестве определения прямой привели известное описание: «Прямая — линия, которая имеет вид туго натянутой нити».

Мы произвели сравнительный анализ доказательств, проводимых в школьном курсе геометрии на различных этапах обучения. Общеизвестно, что под логически строгим доказательством понимают такое доказательство, в котором на каждом из его шагов *а*) посылки представляют собой аксиомы, определения, ранее доказанные теоремы, условия доказываемой теоремы или же заключения, полученные в предшествующих шагах данного доказательства, и *б*) безошибочно применяются правила логического вывода.

Также известно, что школьные доказательства не являются логически строгими, так как в них имеется множество логических пробелов в виде неявных ссылок на наглядность чертежа или на интуитивно ясные предложения, которые не только ранее не доказаны, но даже не сформулированы, причем некоторые из этих пробелов, очевидно, неизбежны в школьном преподавании, другие же могли бы быть устранены при более совершенной методике, особенно в старших классах.

Однако при сравнении подобных доказательств правомерно считать находящимся на более высоком уровне строгости то, в котором значительно меньше логических пробелов.

Проведенный анализ показывает, что в установившейся практике преподавания геометрии под влиянием учебников, написанных в стиле евклидовых «Начал», в VI — VII и в IX — X классах доказательства проводятся на одном и том же уровне строгости. К тому же, следуя прочно укоренившейся в преподавании геометрии «евклидовой» традиции, учителя часто выдают школьные доказательства за образцы логического совершенства и стремятся воспитать у учащихся преклонение перед логическим доказательством и недоверие к опыту, к практической проверке истинности предложений на таком этапе обучения, когда опыт более убедителен для учащихся, чем логическое доказательство. Этим самым логический способ обоснования истин противопоставляется критерию практики вместо того, чтобы этот критерий положить в основу логического способа. Логическая система школьной геометрии, как и всякая логическая система, убедительна не только и не столько потому, что ее предложения обосновываются логическим путем, но и потому, что за логической системой находится опыт, обеспечивающий убедительность исходных посылок системы, ее аксиом.

05.2. Как и в области геометрии, в области алгебры, включая арифметику (в учениях о числе, об уравнениях и неравенствах), можно выявить различные уровни мышления.

На самом низком, нулевом, уровне число неотделимо от множества конкретных предметов, которое оно характеризует, а арифметические операции проводятся непосредственно над множествами предметов.

На следующем, первом, уровне числа (натуральные, целые, дроби) отделены от тех конкретных объектов, которые они характеризуют. На этом уровне оперируют конкретными числами в цифровом выражении, а свойства операций обнаруживаются с помощью неполной индукции.

На втором уровне осуществляется переход от конкретных чисел, выраженных цифрами, к абстрактным, буквенным выражениям, обозначающим конкретные числа лишь при определенном истолковании букв. На этом уровне производится частичное упорядочение свойств. Некоторые свойства в виде правил преобразования алгебраических выражений логически выводятся из других свойств.

На третьем уровне выясняется возможность дедуктивного построения всей алгебры в заданной конкретной интерпретации, т. е. когда буквы, обозначающие объекты исчисления, выражают числа из некоторого заданного множества (натуральных, целых, рациональных или вещественных), а операции имеют обычный смысл.

Наконец, на четвертом уровне, отвлекаясь от конкретной природы объектов исчисления и от конкретного смысла операций, строят алгебру как абстрактную дедуктивную систему, вне всякой интерпретации. На этом уровне происходит не только переход от известной конкретной модели к абстрактной теории, но и переход от абстрактной теории к другим ее конкретным моделям. На этом уровне постигается и возможность существования различных алгебр.

Мы уже говорили раньше (ч. I, гл. 3) о некоторых недостатках в установившейся практике преподавания арифметики и алгебры. С точки зрения уровня, на котором ведется преподавание, получается, что в течение первых пяти лет обучение ведется на первом уровне с очень слабыми элементами второго (введение буквенных обозначений в курсе арифметики). В течение же всех остальных лет обучения преподавание ведется на втором уровне с элементами первого.

Как видно, в отличие от преподавания геометрии, которое достигает, хотя и неполностью, третьего уровня, традиционное преподавание алгебры не подымается выше второго, причем в части логического упорядочения свойств и этот уровень достигается неполностью.

По устаревшей традиции в школьной алгебре не применяются термины «аксиома», «доказательство», хотя здесь мы доказываем не реже, чем в геометрии, и учащиеся получают представление об алгебре, как о своде правил, не связанных между собой, но которые нужно заучивать для того, чтобы применять к решению «примеров» определенных типов.

06. Изучение проблемы логической строгости в школьном преподавании математики приводит к выводу о необходимости расчленения этой проблемы на две части:

1) выяснение целесообразного уровня строгости на каждом этапе обучения так, чтобы этот уровень был доступен учащимся данного возраста и способствовал их более быстрому логическому развитию, достижению более высокого уровня мышления в данной области;

2) выяснение возможности ознакомления учащихся с аксиоматическим методом (на каком конкретном материале и в каком аспекте это осуществимо).

Наша точка зрения и предложения по этим двум проблемам сводятся к следующему:

1) В области геометрии необходим начальный курс, который знакомил бы учащихся начальных классов с широким кругом геометрических фигур и их свойствами исключительно на экспериментальной основе. (Мы уже упоминали в ч. I,

гл. 5 об интересном педагогическом эксперименте в этом направлении, проводимом научным сотрудником сектора обучения математике Научно-исследовательского института общего и политехнического образования АПН РСФСР А. М. Пышкало.)

2) В систематическом курсе геометрии в VI—VIII классах (может быть, целесообразно начинать его с V класса) должен шире использоваться опыт и основанная на нем интуиция учеников в сочетании с постепенно усиливающимися элементами дедукции по мере воспитания у учащихся с помощью специально создаваемых ситуаций чувства потребности в логическом доказательстве.

Под более широким использованием опыта мы понимаем, в частности, принятие без доказательства (в начале курса) наряду с традиционными аксиомами, положенными в основу курса, других интуитивно ясных предложений, хотя они логически доказуемы на базе аксиом. Неправильны утверждения, что принятие без доказательства некоторых традиционно доказываемых в школе предложений разрушает логическую систему школьной геометрии. Логическая система не только не разрушается, а укрепляется, ибо вместо того, чтобы создавать иллюзию строгости замалчиванием логических пробелов, открыто обращаются к опыту учащихся, создавая более прочную базу для этой системы. Принятие без доказательства большего числа предложений, чем это привыкли делать, следуя евклидовым традициям, облегчает учащимся усвоение начал геометрии, укрепляет связь геометрических знаний с практикой, с жизнью, воспитывает у детей доверие к постепенному логическому развертыванию теории.

Метод геометрического эксперимента в начальной стадии обучения геометрии и в систематическом курсе состоит в создании специальных ситуаций и предоставлении учащимся возможности извлечь из них очевидные геометрические факты.

Экспериментальным методом, свойственным физике, мы изучаем абстрактные геометрические объекты и положения на конкретной физической модели. Очевидно, можно идти на такую жертву, на определенном этапе заниматься и такой физикой, чтобы в дальнейшем достичь лучшего понимания математики.

Геометрия, как и вообще математика, не является экспериментальной наукой, и, следовательно, экспериментальное подтверждение не может служить достаточным основанием истинности ее предложений. Это верно, если под геометрией понимать только одну ее фазу — дедуктивную теорию, но геометрия имеет еще две фазы — предшествующую дедуктивной теории фазу накопления фактов (интуитивную базу, по выражению Феллера, или индуктивный синтез, по выражению Фреше) и следующую за дедуктивной теорией фазу приложений. В школьном обучении эти две фазы играют важную роль: первая, в частности, для понимания дедуктивной теории, вторая — для ее оправдания. Учитель должен заботиться о том, чтобы сделать изучаемое понятным, не меньше, чем о том, чтобы доказывать на достаточном уровне строгости.

3) Все, что сказано во втором пункте, относится к преподаванию геометрии в восьмилетней школе. Логический уровень преподавания геометрии в старших классах должен быть значительно выше традиционного. Однако и здесь геометрия не может строиться на самом высоком уровне в виде абстрактной теории, вне всякой конкретной интерпретации. Речь идет лишь о более четком разграничении логических и интуитивных элементов, об устранении из доказательств ряда логических пробелов и о построении в аксиоматическом стиле, но в конкретной интерпретации, небольшого фрагмента теории.

Достижению более высокого логического уровня преподавания геометрии в старших классах способствует приобретение учащимися определенных логических знаний в результате работы, описанной в главах 4—7 первой части настоящей книги. Различный уровень преподавания геометрии в VI — VII и в IX — X классах иллюстрируется в очерках изложения отдельных фрагментов теории в этих классах, составляющих содержание следующих двух глав (гл. 2 и 3).

4) Мы уже указали (ч. I, гл. 3) на нецелесообразность четкого отделения алгебры от арифметики и на экспериментально подтвержденную возможность более раннего перехода к изучению собственной алгебры на том уровне, на котором в настоящее время она изучается только в VI классе.

5) В старших классах логический уровень преподавания алгебры может и должен быть значительно выше установившегося. О возможности повышения уровня преподавания учения об уравнениях и неравенствах говорилось в гл. 6 (ч. I).

В алгебре есть возможность показать переход от конкретной модели к абстрактной теории и от нее к другим конкретным моделям, раскрывая значение современного аксиоматического метода, смысл многозначности аксиоматизированной теории, значение моделей в связи математической теории с практикой.[1]

Таким образом, хотя в настоящее время логический уровень преподавания алгебры ниже уровня преподавания геометрии, в области алгебры можно достичь наивысшего

[1] Мы это уже показали на примере булевой алгебры (ч. I, гл. 7) и покажем дальше на примере коммутативной группы (гл. 4).

современного уровня, разумеется, не стремясь строить на нем обучение значительной части алгебры в старших классах. Речь идет о том, чтобы иллюстрировать сам процесс аксиоматизации теории на примере небольшого фрагмента алгебраической теории. Геометрия менее подходит для этой цели, хотя традиционно аксиоматический метод в обучении неизменно связывался именно с геометрией. В основе геометрии лежит громоздкая аксиоматика, и нет возможности привести примеры сколько-нибудь интересных конкретных моделей, отличных от классической модели, на которой строится в школе преподавание геометрии. Булева алгебра и теория коммутативной группы отличаются простотой аксиоматики и обилием интересных конкретных моделей. Теорию коммутативной группы предлагает использовать для раскрытия сущности аксиоматического метода французский математик Монжайен в своей интересной книге «Введение в современную математику».[1] Однако она представляется нам малодоступной для учащихся.

В области учения о функциях школьное преподавание может и должно достичь современного уровня понимания идеи функции.[2] Обычно считают, что понятие функции в процессе обучения должно рассматриваться на трех уровнях:

а) на самом низком уровне функция отождествляется с алгебраическим выражением, с формулой (функциональная пропедевтика), и этот уровень уже доступен учащимся IV — VI классов;

б) на следующем уровне (VII — VIII кл.) понятие функции постепенно освобождается от отождествления с формулой, которая становится лишь одним из способов выражения функции. Здесь функция усваивается в ее классической трактовке, причем термин «функция» применяется больше для обозначения зависимой переменной величины, чем самой зависимости между переменными величинами;

в) на третьем уровне (IX — X кл.) понятие функции должно изучаться в ее современной теоретико-множественной трактовке.

Однако большего эффекта можно достичь, если отказаться от такого исторического подхода и с самого начала использовать современную трактовку, разумеется, при соответствующей ее дидактической обработке.

Геометрические преобразования и элементы математической логики, где встречаются логические функции, дают примеры нечисловых функций, и это приближает учащихся к

---

[1] A. Monjallon. Introduction aux mathématiques modernes. Paris, 1960.

[2] А. Я. Хинчин. Основные понятия математики в средней школе. Педагогические статьи. М., 1963, стр. 77.

пониманию общей идеи отображения одного множества в другое, лежащей в основе понятия функции.

07. В нашей общеобразовательной школе нет еще достаточного опыта преподавания начал математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений). Очевидно, в этой области, учитывая сложность материала, мы не должны ставить целью достижение сколько-нибудь высокого уровня строгости. Здесь главная цель — достижение подлинного понимания, даже если для этого иногда приходится жертвовать строгостью изложения.

Глава 2. Эксперимент и логическое доказательство

Для иллюстрации отношения экспериментального и логического методов в начале систематического курса геометрии (VI — VII кл.) мы приводим ниже описание изучения отдельных фрагментов этого курса. Применяемая методика характеризуется следующими особенностями:

а) при введении новых понятий и установлении новых истин широко применяется эксперимент — специально поставленный опыт в виде практической работы, выполняемой всеми учащимися;

б) результаты опыта служат посылками для обнаруживания индуктивным путем общих закономерностей;

в) некоторые из обнаруженных экспериментально свойств могут быть получены с помощью рассуждений из других свойств, что сокращает эксперимент;

г) ведется разъяснение значения и недостаточности опыта, индуктивных выводов, что постепенно подводит учащихся к пониманию необходимости логического (дедуктивного) доказательства;

д) разрабатывается эксперимент, подсказывающий идею логического доказательства, или же само логическое доказательство проводится в виде эксперимента.

Мы уже показали (ч. I, гл. 4), как разъясняются на теоретико-множественной основе некоторые важные положения, которые в традиционном курсе геометрии не рассматриваются (прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, замкнутая ломаная определяет на плоскости две области, различие внутренней области от внешней и др.).

Рассмотрим здесь введение осевой симметрии и некоторые вопросы геометрии треугольника.

1. Осевая симметрия

Учащимся показывается ряд фигур, из которых некоторые обладают, а другие не обладают осевой симметрией. Замечается, что каждая из «симметричных» фигур делится некоторой прямой на две равные части так, что если согнуть фигуру по этой прямой, одна часть фигуры наложится и полностью совпадет с другой. Для каждой же из «несимметричных» фигур такой прямой найти нельзя.

В природе, вокруг нас встречается много различных симметричных фигур — архитектурные украшения, строительные и другие детали, некоторые здания, некоторые листья на деревьях и т. д.

После такого небольшого введения переходят к детальному изучению осевой симметрии. Каждому ученику предлагается согнуть лист бумаги так, чтобы одна часть листа упала на другую и образовалась л и н и я с г и б а. Затем предлагается выпрямить снова лист и отметить на нем произвольную точку A, не лежащую на линии сгиба, затем снова согнуть лист по той же линии сгиба и определить, глядя на свет через согнутый лист, с какой точкой совпала при этом точка A. Пусть эта точка — A_1. Учащимся сообщают, что точки A и A_1 называются с и м м е т р и ч н ы м и относительно прямой x (линии сгиба), называемой о с ь ю с и м м е т р и и этих точек. Для другой точки B, лежащей по другую сторону от линии сгиба, чем точка A, предлагается определить симметричную ей точку относительно той же оси x. Замечаем, что если взять точку C на линии сгиба, она остается неподвижной при сгибании листа, т. е. не совпадает с какой-либо другой точкой листа. Мы говорим, что любая точка оси симметрии (линии сгиба) сама себе симметрична.

Рассматриваются свойства расположения относительно оси пар симметричных точек (A, A_1), (B, B_1).

После повторения вопроса о возможных расположениях двух точек относительно прямой учащиеся замечают, что симметричные точки всегда л е ж а т п о р а з н ы е с т о р о н ы о т о с и с и м м е т р и и.

Предлагается соединить симметричные точки отрезком прямой. Учащиеся высказывают предположение, что симметричные точки лежат на равных расстояниях от оси симметрии, т. е. что отрезки AA_1, BB_1 делятся пополам осью симметрии. Это предположение укрепляется с помощью измерения.

Если ученики не замечают перпендикулярность отрезков AA_1 и BB_1 к оси симметрии (обычно равенство углов не так быстро замечается ими, как равенство отрезков), берут две точки, равноотстоящие от оси, по разные стороны от нее, но не на одном перпендикуляре к ней, и задают вопрос, будут ли эти точки симметричны относительно той же оси. Сопоставляя расположение этих точек с расположением симметричных точек, учащиеся обнаруживают и последнее свойство: симметричные точки лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Это пока предположение, которое также укрепляется с помощью измерения.

Возникает вопрос, нельзя ли убедиться в правильности наших предположений, не производя измерений. Учащиеся предлагают согнуть лист бумаги по оси симметрии, тогда точка А совпадает с точкой A_1, а отрезок АМ — с отрезком A_1M (M — точка пересечения отрезка AA_1 с осью); это фактически получается при сгибании. Отсюда и делают вывод о равенстве отрезков AM и A_1M и углов, образованных этими отрезками с осью симметрии (рис. 19).

Учащимся предлагается установить истинность предположений, не производя сгибание листа бумаги (мысленно представляя себе, что его согнули). На этом этапе обучения ученики обычно так не рассуждают, и учитель следующим образом наводит их на путь доказательства.

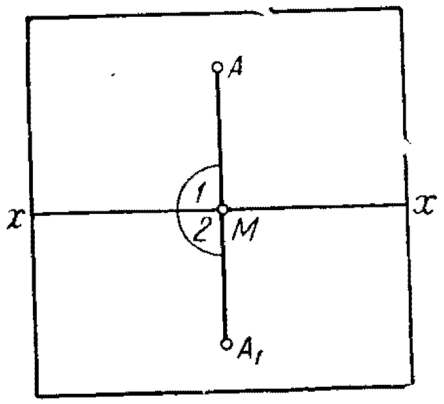


Рис. 19.

Представим себе мысленно, что лист бумаги согнули по прямой x. Что произойдет с точками A и A_1? Почему они совпадут? (Часто на этот вопрос учащиеся отвечают неправильно, утверждая, что точки A и A_1 совпадут потому, что совпадут отрезки AM и A_1M. Необходимо им напомнить, из чего мы исходим, что нам известно о точках A и A_1 и как понимать, что эти точки симметричны относительно данной оси.) Что произойдет с точкой M? Что произойдет с отрезками AM и A_1M? Почему они совпадут? Что произойдет с углами, образованными этими отрезками с осью симметрии?

Какие это углы? Почему они прямые?

Интересно сравнить последнее рассуждение с рассуждением, проведенным при фактическом сгибании листа бумаги.

При сгибании листа бумаги мы непосредственно установили совпадение отрезков и углов. В последнем же рассуждении, чтобы получить вывод о совпадении отрезков AM и A_1M, мы ссылались на: *а*) определение симметричных точек, как совпадающих при сгибании листа по оси; *б*) свойство точек оси, остающихся неподвижными при таком сгибании, и *в*) свойство единственности прямой, проходящей через две данные точки.

Вот пример того, как экспериментальный вывод заменяется логическим выводом, вытекающим из ранее установленных истин.

Таким образом, приходят к выводу, что две симметричные точки удовлетворяют следующим трем условиям: 1) они лежат по разные стороны от оси, 2) на одном перпендикуляре к оси и 3) на равном расстоянии от нее.

Естественно возникает вопрос: если две точки удовлетворяют трем условиям (1—3), будут ли они симметричны? Как можно в этом убедиться с помощью рассуждений, не производя непосредственно сгибания листа? Здесь необходимо четко выделить условия, из которых мы исходим, и то, что мы должны установить. Имеются две точки A и A_1, удовлетворяющие условиям 1—3. Мы хотим убедиться в том, что эти точки симметричны, т. е. что они совпадут при сгибании листа по оси, не производя самого сгибания. В рассуждении учащиеся обычно допускают ошибку, утверждая, что из совпадения углов 1 и 2 (рис. 19) следует совпадение отрезков AM и A_1M вместо лучей MA и MA_1. Учащиеся сами обнаружат ошибку, если им задать вопрос, совпали ли бы эти отрезки, если они не были бы равны по условию?

Таким образом устанавливают, что:

а) если две точки симметричны относительно прямой (или оси), они удовлетворяют условиям 1—3;

б) если две точки удовлетворяют условиям 1—3, они симметричны относительно прямой.

Поэтому свойства 1—3 определяют симметричность точек.

Учащимся сообщают, что когда истинность какого-нибудь высказывания (или предложения) устанавливается с помощью рассуждений, в которых используются известные истины, то говорят, что доказывают это предложение, а сами эти рассуждения называют доказательством этого предложения.

В дальнейшем осевая симметрия определяется как преобразование множества точек плоскости в самое себя, или преобразование плоскости в себя.

Исходя из первого представления об этом преобразовании, непосредственно связанного с физическим экспериментом — сгибанием листа бумаги, мы постепенно с помощью элементов дедукции освобождаемся от этого эксперимента (хотя и не полностью, так как при необходимости можем вернуться к нему) и приходим к общепринятому определению осевой симметрии, как геометрического преобразования, в котором каждой точке плоскости соответствует определенная точка этой же плоскости, так что любые две соответствующие точки удовлетворяют условиям 1—3 или же совпадают с точкой оси.

Определение с помощью построения точки, симметричной данной точке относительно данной прямой, не встречает у учащихся затруднений, так же как и обратная задача построения оси симметрии по заданным двум соответствующим точкам.

При переходе к рассмотрению симметричных отрезков, прямых, треугольников и вообще фигур мы неизменно осылаемся на свойство (теперь уже следующее из определения), состоящее в том, что симметричные точки совпадают при сгибании плоскости по оси. Фактически можно этот эксперимент не производить, а логически доказать, что отрезки, концы которых симметричны, совпадут при сгибании листа по оси.

Учащиеся должны знать, что осевая симметрия на плоскости определяется заданием оси симметрии. Она также определена в том случае, если дана пара симметричных точек или пара симметричных прямых, так как в этих случаях легко определяется ось симметрии.

Нужно, чтобы учащиеся также поняли, что значит осевая симметрия «определена» или «задана», иначе знание того, что она определяется осью, или парой симметричных точек, или прямых, будет чисто формальным. Мы разъясняем: говорят, что осевая симметрия «определена» или «задана» в том случае, если для каждой точки плоскости можно найти соответствующую ей (симметричную ей) точку.

2. Свойства равнобедренного треугольника

Учащимся предлагается начертить равнобедренный треугольник, провести в нем с помощью транспортира биссектрису угла при вершине, опустить с помощью чертежного треугольника высоту на основание, разделить с помощью линейки со шкалой пополам основание и провести медиану.

У большинства учащихся обычно биссектриса, высота и медиана совпадают, однако у некоторых учеников эти линии очень близки или совпадают только две линии.

Создается удобная ситуация для того, чтобы обратить внимание учащихся на значение и недостатки опытного подтверждения свойств фигур.

Проведенный опыт приводит учеников к открытию важного свойства равнобедренного треугольника. Но можно ли на основании этого опыта утверждать, что во всяком равнобедренном треугольнике имеет место это свойство? Ведь у некоторых учеников опыт не подтвердил наличие этого свойства. Те, у которых линии совпали, утверждают, что у них правильно проведены эти линии, те, у которых линии не совпали, утверждают, что у них тоже все правильно. Кто же прав? На основании проведенного опыта можно делать п р е д п о л о ж е н и е о наличии указанного свойства в любом равнобедренном треугольнике. Это предположение станет утверждением, т. е. истинным высказыванием, в том случае, если мы сможем его доказать, установить наличие указанного свойства в любом равнобедренном треугольнике с помощью рассуждений (доказательства), исходя из ранее известных истин. Как провести это доказательство, подскажет опыт.

Учащимся предлагается согнуть вырезанный из бумаги равнобедренный треугольник ABC так, чтобы равные стороны AB и BC совпали (рис. 20). Отмечается, что два треугольника, на которые линия сгиба BD разделила треугольник ABC, полностью совпадают. Таким образом устанавливают, что линия сгиба BD является осью симметрии треугольника ABC.

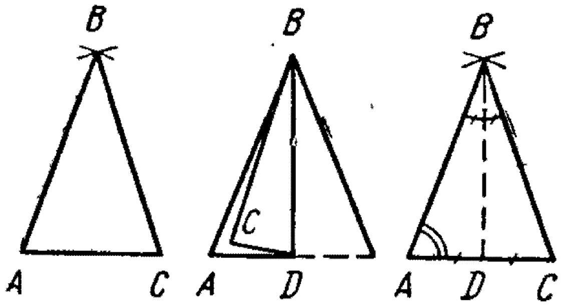


Рис. 20.

Задаются следующие вопросы: Какие углы совпали при сгибании треугольника? Чем является BD для угла B треугольника ABC? Какие отрезки совпали при этом сгибании? Чем является отрезок BD для треугольника ABC (исходя из того, что отрезки AD и CD совпали)? Что следует о расположении прямых AC и BD из того, что точки A и C симметричны относительно BD.

Приходят к выводу, что: *а*) ось симметрии равнобедренного треугольника является биссектрисой угла при вершине и на ней лежат высота и медиана, проведенные из этой вершины, и *б*) углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Возникает вопрос, нельзя ли доказать это свойство, не прибегая к сгибанию треугольника? Проведенный опыт показывает, что биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является осью симметрии этого треугольника и тем самым подсказывает идею доказательства. Проведем биссектрису BD угла B при вершине. Она является осью симметрии угла B (это учащиеся уже должны знать из предыдущего), и так как $AB = BC$, то отрезки AB и BC симметричны относительно BD, следовательно, и точки A и C симметричны, поэтому $AD = DC$ и $BD \perp AC$. Углы при основании также симметричны относительно BD и, следовательно, равны.

3. Равенство треугольников

Для того чтобы показать, как изучается равенство треугольников в VI классе, приведем описание процесса изучения одного из признаков.

Учащимся предлагается начертить разносторонний треугольник ABC, обозначить сторону AB через c, BC — через a, AC — через b и выполнить следующую работу: построить суммы отрезков $a+b$, $b+c$, $c+a$ и сравнить каждую из этих сумм с третьей стороной треугольника. После выполнения этой работы учащимся задается вопрос: какова сумма двух сторон треугольника по отношению к третьей стороне? В этом же треугольнике предлагается сравнить разность двух сторон с третьей. После установления свойства суммы двух сторон треугольника учащимся предлагается убедиться в истинности этого путем рассуждений, исходя из уже известного другого геометрического свойства. Учащиеся без затруднения находят основание для этого вывода — характеристическое свойство отрезка прямой.

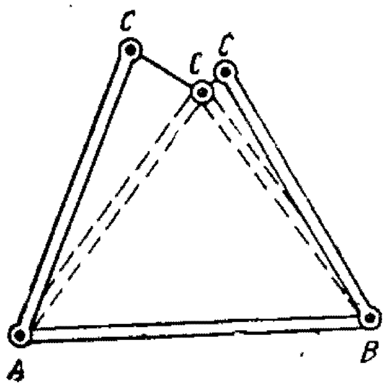


Рис. 21.

По заданию преподавателя ученики изготовляют к уроку наборы из трех палочек с отверстиями на концах для построения из них треугольников. В процессе этой работы они обнаруживают, что не всегда из трех палочек можно сложить треугольник, и быстро находят объяснение этому. Сконструировав треугольник из палочек, учащиеся с помощью учителя обнаруживают и способ построения треугольника по трем сторонам циркулем и линейкой.

Действительно, связав палочки AC и BC в концах A и B с палочкой AB (рис. 21), вращают их вокруг точек A и B. При этом их вторые концы описывают дуги окружностей с центрами A и B и радиусами, равными соответственно AC и BC. В точке, где эти дуги пересекаются, связывают вторые концы палочек AC и BC и получают третью вершину C треугольника. Если теперь дать вместо палочек три отрезка (можно взять отрезки конкретной длины, например $c = 10$ *см*, $b = 5$ *см*, $a = 7$ *см*) и потребовать построить треугольник, стороны которого были бы равны этим отрезкам, то циркулем и линейкой по существу повторяем то же построение, которое мы осуществили с помощью палочек.

Как проверить, что построенный треугольник ABC — искомый?

По этим же данным на листе бумаги строится еще один треугольник $A_1B_1C_1$. Этот треугольник вырезается и накладывается на первый так, чтобы какая-нибудь сторона, например A_1B_1, совпала с равной ей стороной AB треугольника ABC. Треугольники совпадают.

Понятие равных треугольников, как таких, которые при наложении совпадают, уже известно учащимся из рассмотрения симметричных треугольников, поэтому они приходят к выводу, что эти треугольники равны. Замечается, что при совпадении треугольников совпали не только стороны, но и углы. Задается вопрос: «Как можно убедиться в равенстве углов, не накладывая один треугольник на другой»? Учащиеся проверяют равенство углов с помощью транспортира.

Так как треугольники, построенные по трем сторонам, оказались равными, проведенный опыт подтверждает, что если в двух треугольниках стороны соответственно равны, то и треугольники равны. Целесообразно сообщить учащимся, что этот п р и з н а к равенства треугольников может быть доказан, но мы его примем пока без доказательства, удовлетворяясь подтвержденным опытом. На данном этапе доказательство этого признака покажется трудным и непонятным.

У такого способа первоначального установления признаков равенства треугольников имеются противники, требующие, чтобы эти признаки доказывались при первом же ознакомлении с ними учащихся. Предлагаемые доказательства с помощью «мысленного наложения» требуют четкого различения условий наложения от получаемых следствий, что, несомненно, менее доступно для шестиклассников в начале курса, чем фактическое наложение вырезанных из бумаги треугольников, весьма убедительно подтверждающее их равенство. К тому же признак, который приведен выше в качестве примера, доказывается в школьном учебнике[1] несостоятельно, ибо из трех возможных случаев (BB_1 проходит через внутреннюю точку отрезка AC, через конец его и через внешнюю точку) рассматривается лишь один. Таким образом, здесь нарушается полнота дизъюнкции, которую А. Я. Хинчин считал одной из характерных особенностей правильного математического мышления.[2] Он говорил: «В математике нет и не может быть «наполовину доказанных» и «почти доказанных» утверждений».[3]

Традиционной практике почти неизвестно, чтобы учитель говорил ученикам: «Это свойство доказывается, но ввиду того, что доказательство сложное, мы примем его без доказательства (или докажем его позже, когда будем более подготовлены к пониманию доказательства)». Вместо этого стремятся «как-нибудь доказать», чтобы создать представление

---

[1] Н. Н. Никитин. Геометрия. Учебник для VI—VIII классов. М., 1961, стр. 54.

[2] А. Я. Хинчин. О воспитательном эффекте уроков математики. Педагогические статьи. М., 1963, стр. 135.

[3] Там же, стр. 131.

о том, что мы «все доказываем», за исключением лишь нескольких первоначальных предложений, аксиом, принимаемых без доказательства, т. е. создают ту же иллюзию логического совершенства системы, которую создал себе и своим читателям Евклид.

В дальнейшем может быть дано доказательство указанного признака с использованием симметрии, освобождающей нас от необходимости рассмотрения трех случаев.[1]

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Приведем в качестве примера обнаружение и доказательство следующего свойства: во всяком треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Учащиеся чертят разносторонний треугольник, измеряют два каких-нибудь угла и противолежащие им стороны. На вопрос, что они обнаружили, учащиеся формулируют предположение «против большего угла лежит бо́льшая сторона». Возникает вопрос: во всяком ли треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона?

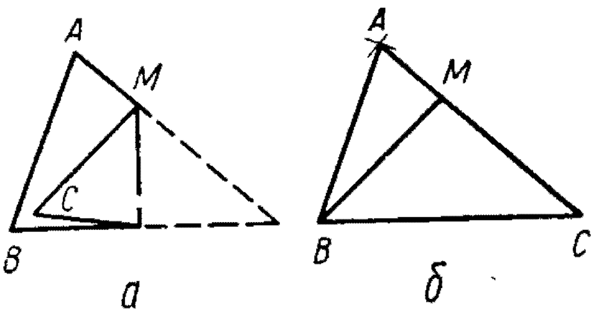


Рис. 22.

Создается положение, удобное для разъяснения значения опыта и логического доказательства. В результате опыта можно высказать лишь предположение о том, что обнаруженное на нескольких треугольниках свойство характерно для всякого треугольника. Чтобы быть уверенными в общности этого свойства, мы должны его доказать. Учащимся предлагается сложить вырезанный из бумаги треугольник ABC, в котором угол B больше угла C, так, чтобы вершина C совпадала с вершиной B (рис. 22, a). Так как угол C меньше угла B, то он покроет лишь часть угла B и сторона AC превращается в ломаную AMB, которая больше отрезка AB. Таким образом получили, что сторона AC, лежащая против большего угла B, больше стороны AB, лежащей против меньшего угла C.

Доказательство проведено в виде практической работы. Возникает вопрос: нельзя ли это же доказательство осуществить без сгибания треугольника? Переход к такому доказательству уже не представляет затруднений. Действительно, наложение угла C на угол B может быть заменено построением угла CBM, равного углу C (рис. 22, $б$). Ввиду того, что

[1] Н. А. Глаголев. Элементарная геометрия, планиметрия. М., 1954. стр. 53.

угол C меньше угла B, луч BM пройдет внутри угла ABC и пересечет сторону AC в некоторой точке M. Так как углы при основании BC треугольника BMC равны, этот треугольник равнобедренный и $BM = MC$. Следовательно, сторона $AC = AM + MC$ может быть заменена суммой отрезков $AM + MB$. Но ломаная AMB больше отрезка AB, соединяющего ее концы, следовательно, и сторона AC больше AB.

Приведенное доказательство, путь которого раскрыт в процессе выполнения всеми учащимися практической работы, более доступно им на этом этапе, чем содержащееся в учебнике доказательство «от противного».[1] Кроме того, приведенное доказательство теоремы, фигурирующей в учебнике как обратная, содержит в себе аналогию с доказательством прямой теоремы. При доказательстве прямой теоремы на большей стороне откладывают отрезок, равный меньшей стороне. В приведенном выше доказательстве обратной теоремы на большем угле откладывают угол, равный меньшему.

Раскрытие аналогии в путях доказательства представляет собой эффективное средство обучения доказательству.

Целесообразно проанализировать наши рассуждения, выясняя, какие ранее известные истины мы в них использовали.

К такому анализу рассуждений необходимо приучать учащихся с первых шагов доказательства. Требование перечислить все предложения, принимаемые в качестве посылок в доказательстве, должно часто предъявляться учащимся. Это один из важных элементов методики обучения доказательству.

5. Сумма внутренних углов треугольника

Экспериментально обнаружить, что сумма углов треугольника равна 180°, можно сразу же, как только учащиеся научились измерять углы с помощью транспортира.

Ученикам предлагается измерить транспортиром углы начерченного в тетради треугольника и сложить результаты измерения. У некоторых учащихся сумма углов треугольника получается меньше 180°, у других — больше, но у всех результаты близки к 180°, а у некоторых получается даже «точно» 180°. Учащиеся догадываются, что должно получиться 180° и другой результат объясняется погрешностями измерения.

Таким образом, в результате первого опыта высказывается предположение, что во всяком треугольнике сумма внутрен-

---

[1] Н. Н. Никитин. Геометрия. Учебник для VI—VIII классов. М., 1961, стр. 67.

них углов равна 180°. Если этот опыт не проведен раньше изучения данной темы в систематическом курсе, то целесообразно его провести в начале урока, посвященного этой теме.

Высказанное уже предположение подкрепляется вторым опытом, раскрывающим идею доказательства. У каждого ученика заготовлен вырезанный из бумаги треугольник. Учитель предлагает «оторвать» два угла и приложить их к третьему так, как он это делает сам на большом треугольнике (рис. 23, *а*). Учащиеся замечают, что получили три угла с общей вершиной *А*, расположенные по одну сторону от прямой. Следовательно, сумма этих углов равна 180°.

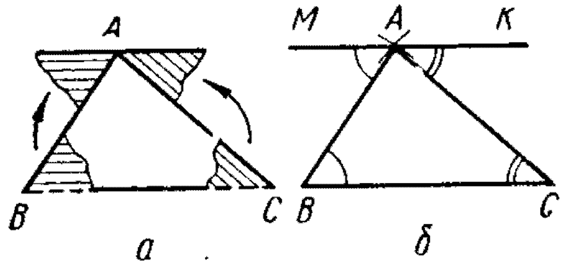


Рис. 23.

Но можем ли мы быть уверены в том, что два луча, сходящиеся в точке *А*, образуют прямую линию? Ведь они могут образовать ломаную, так мало отличающуюся от прямой, что мы этого не заметим. Учащиеся понимают, что выполненная нами работа еще не представляет собой доказательства, но она подсказывает путь к нему. Действительно, вместо того, чтобы отрывать два угла и прикладывать их к третьему, начертим треугольник ABC (рис. 23, *б*) и в вершине *А* проведем луч AM, образующий угол MAB, равный углу B, и луч AK, образующий угол KAC, равный углу C. Нужно доказать, что лучи AM и AK образуют одну прямую. Под руководством учителя учащиеся легко обнаруживают, что $AM \| BC$ и $AK \| BC$, и так как по аксиоме параллельных через точку *А* не проходит более одной прямой, параллельной BC, то лучи AM и AK образуют одну прямую. Отсюда и следует, что $\angle MAB + \angle A + \angle KAC = 180°$ или $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Приведенное доказательство теоремы о сумме углов треугольника содержит ссылку непосредственно на аксиому о параллельных и в этом отношении заслуживает предпочтения перед другими доказательствами, в которых содержится ссылка на теорему об углах при параллельных, являющуюся следствием этой аксиомы.

Непосредственная ссылка на аксиому о параллельных облегчает разъяснение связи теоремы о сумме углов треугольника с этой аксиомой при ознакомлении учащихся (в старших классах) с проблемой пятого постулата и началами геометрии Лобачевского.

Приведенное ниже изложение начал стереометрии (теория принадлежности и параллельности в евклидовом пространстве) не является аксиоматическим в современном смысле этого слова, так как оно представляет собой построение не абстрактной теории, а лишь ее конкретной модели. Поэтому мы и говорим о построении «в аксиоматическом стиле», а не об аксиоматическом построении начал стереометрии.

Цель такого изложения части школьной геометрии состоит в том, чтобы дать учащимся представление о строгой логической организации аксиоматической теории, о дедуктивной системе. Вторая сторона аксиоматического метода — построение абстрактной теории вне всякой интерпретации — рассматривается в 4-й главе на примере теории коммутативной группы.

Формулировки определений и теорем, изложение их доказательств сопровождаются их краткой записью с применением геометрической и логической символики.

Логический аппарат применяется для анализа и уточнения структуры аксиом, определений и теорем, для выяснения логической структуры доказательств, поэтому почти все доказательства разбиты на отдельные части. Почти всюду приводятся две формы изложения: обычная и символическая. Необходимо учесть, что применение логической символики и логических операций в явном виде возможно лишь в том случае, если учащиеся хорошо освоились с логической символикой, понимают точный смысл каждого символа.

У нас часто выдвигаются возражения не только против применения логической символики, но и против применения одной геометрической символики. Многие учителя и методисты не проявляют достаточного понимания значения точного языка символов, в то время как математика все шире пользуется этим языком. Благодаря своей точности и ясности (однозначности смысла каждого символа) символический язык при условии правильного применения и понимания приобретает воспитательное воздействие, выходящее за рамки математического образования. А. Я. Хинчин, отмечая воспитательное воздействие свойственной математике точности символики, указывая, что строгая правильность математической символики постепенно становится привычкой учащегося, пишет: «Но такого рода привычка, приобретенная в какой-либо одной сфере мышления, неизбежно приводит к воспитанию и общего стиля мышления учащегося; он начинает точнее выражаться и в устной речи, и в письменном изложении; в частности, он уделяет больше внимания правописанию, орфографические ошибки переживаются им с такой же остротой и таким же беспокойством, как математические. Мы неизменно наблюдаем, что ученики, научившиеся требовательно относиться к точности математической символики, легче и быстрее перестают делать орфографические ошибки».[1]

Сказанное полностью относится и к логической символике, так как она по существу является математической. Применяемые логические операции широко встречаются не только в математике, их знание повышает общую культуру мышления учащихся.

Приведенное ниже изложение сопровождается методическими комментариями, анализом отдельных предложений, доказательств. Эти отклонения от непосредственного изложения материала выделены в отдельные пункты.

Ввиду того, что нас интересует лишь логический уровень изложения материала, мы приводим только некоторые задачи на доказательство. Предполагается широкое применение моделей и чертежей.

В отдельных случаях целесообразно иллюстрировать доказываемое предложение на чертеже или модели, но доказывать его следует без чертежа, чтобы формировать у учащихся правильное представление о его роли в доказательстве. Однако злоупотреблять такими доказательствами нельзя.

Мы не будем указывать, где целесообразно применять модель, где только чертеж, а где и то, и другое вместе. Эти вопросы относятся к важной педагогической проблеме выработки у учащихся пространственных представлений и воображения, которую мы здесь не рассматриваем.

* * *

01. Для краткой записи и выяснения точного смысла высказываний о геометрических объектах и отношениях представляется целесообразным упорядочить и дополнить геометрическую символику.

Условимся обозначать точки большими латинскими буквами A, B, C, ... ; прямые — малыми латинскими буквами a, b, c, ...; плоскости — греческими буквами α, β, γ, ...

Кроме известных из планиметрии символов отношений параллельности, равенства, введем символы для обозначения отношений принадлежности, пересечения, совпадения. Высказывания «точка A принадлежит прямой a», «точка A лежит на прямой a», «прямая a проходит через точку A» — синони-

[1] А. Я. Хинчин. О воспитательном эффекте уроков математики. Педагогические статьи. М., 1963, стр. 145.

мы, так как они выражают одно и то же отношение между точкой A и прямой a. Поскольку прямая a может рассматриваться как множество точек, то принадлежность точки A к прямой a обозначим символом принадлежности объекта к множеству —«$\in$». Приведенные выше высказывания запишутся кратко так: «$A \in a$». Аналогично «$A \in \alpha$»— символическая запись высказываний-синонимов: «точка A принадлежит плоскости α», «точка A лежит на плоскости α», «плоскость α проходит через точку A».

Кроме геометрической символики, применим также известную нам логическую символику. Отрицания высказываний «$A \in a$», «$A \in \alpha$» обозначим соответственно $\overline{A \in a}$, $\overline{A \in \alpha}$. Высказывание «точка A не лежит в плоскости α» равносильно высказыванию «точка A лежит вне плоскости α». Если символом $\overline{\alpha}$ обозначим дополнение множества точек плоскости α до множества точек пространства, то высказывания $\overline{A \in \alpha}$ и $A \in \overline{\alpha}$ равносильны.

Применим также знаки дизъюнкции «$\vee$»; конъюнкции „$\wedge$“; импликации « $\rightarrow$ »; кванторы общности (A), (a), (α); кванторы существования $(\exists A)$, $(\exists a)$, $(\exists \alpha)$.

Конъюнкцию $(A \in a) \wedge (B \in a) \wedge (C \in a)$ обозначим сокращенно символом $(A, B, C \in a)$, а конъюнкцию $(A \in a) \wedge (A \in b) \wedge$ $\wedge (A \in c)$— символом $(A \in a, b, c)$. Последовательность кванторов (A) (B) (C) обозначим символом (A, B, C),[1] аналогично $(\exists A)(\exists B)(\exists C)$— $(\exists (A, B, C))$.

Отношение совпадения обозначим символом «$\equiv$». Тогда высказывания «точки A и B совпадают», «прямые a и b совпадают», «плоскости α и β совпадают» запишутся соответственно так: «$A \equiv B$», «$a \equiv b$», «$\alpha \equiv \beta$».

02. Основные простейшие элементы, из которых геометрия строит свои образы, суть точки, прямые и плоскости. Эти понятия принимаются за первоначальные, поэтому они логически неопределяемы через другие понятия.

Точки, прямые и плоскости могут находиться в некотором отношении, называемом отношением п р и н а д л е ж н о с т и. Некоторые свойства этого отношения принимаются за исходные и составляют содержание а к с и о м п р и н а д л е ж н о с т и, другие же выводятся из них логическими средствами, т. е. с помощью правил логического вывода, и составляют содержание теорем. Аксиомы принадлежности составляют часть системы аксиом геометрии, т. е. системы тех первоначальных, простейших истин, подтвержденных опытом и принимаемых

[1] Буквы для обозначения точек берем с начала алфавита. Большими латинскими буквами конца алфавита — X, Y, ...— будем обозначать произвольные высказывания.

без доказательства (поскольку они первоначальные, исходные), из которых все другие геометрические предложения (теоремы) выводятся с помощью правил логического вывода.

Аксиомы принадлежности

I.1. Через любые две[1] точки проходит одна и только одна прямая.

02.1. Нетрудно заметить, что эта аксиома, известная из планиметрии, представляет собой конъюнкцию двух высказываний:

$$(A,\ B)\ (\exists a)\ (A,\ B \in a) —$$

«для любых двух точек A и B существует прямая a, такая, что A и B принадлежат ей» и

$$(A,\ B)\ \overline{(\exists (a,\ b))}\ [(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)] —$$

«для любых двух точек A и B не существует двух прямых a и b, таких, что точки A и B принадлежат им».

Первое из этих высказываний выражает существование, второе — единственность прямой, проходящей через любые две точки.

Эту аксиому можно записать символически еще и следующим образом:

$$(A,\ B)(\exists a)(A,\ B \in a) \wedge (b)\ [(A,\ B \in b) \rightarrow (b \equiv a)].$$

В этой форме единственность выражается импликацией: «если точки A и B принадлежат произвольной прямой b, то она совпадает с прямой a».

Аксиома I.1 дает нам возможность обозначить символом «AB» прямую, проходящую через точки A и B, так как по этой аксиоме такая прямая существует и она единственна.

I.2. На любой прямой имеется бесконечное множество точек. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

02.2. Эта аксиома содержит в первой своей части лишнее требование. Достаточно постулировать существование двух точек на каждой прямой и в дальнейшем после введения аксиом порядка доказывается, что их бесконечное множество. Однако из педагогических соображений мы не ставим себе цель положить в основу изложения минимальную аксиоматику. Это значительно усложнило бы развертывание теории.

Вторая часть аксиомы I.2 может быть записана так:

$(\exists (A,\ B,\ C))(a)\overline{(A,\ B,\ C \in a)}$ или $(\exists (A,\ B,\ C))\ \overline{(\exists a)}(A,\ B,\ C \in a)$.

I.3. Существует одна и только одна плоскость, проходящая через три точки, не принадлежащие одной прямой.

02.3. Эта аксиома представляет собой конъюнкцию двух высказываний, одно из которых выражает существование, а другое — единствен-

---

[1] Под выражением «две точки (прямые, плоскости)» понимаем «две различные точки (прямые, плоскости)» и обозначаем их различными буквами.

ность плоскости, проходящей через любые три точки, не лежащие на одной прямой (такие три точки существуют вследствие аксиомы I.2).

$$(A,\ B,\ C)[(\overline{\exists a})(A,\ B,\ C\epsilon a) \rightarrow (\exists\alpha)(A,\ B,\ C\epsilon\alpha)\wedge(\beta)((A,\ B,\ C\epsilon\beta) \rightarrow (\beta \equiv \alpha))].$$

Аксиома I.3 дает нам возможность обозначить символом «ABC» плоскость, проходящую через три точки, A, B, C, не лежащие на одной прямой, так как по этой аксиоме такая плоскость существует и она единственна.

I.4. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки этой прямой принадлежат этой же плоскости.

$$(\alpha)\,(A,\ B)\ [(A,\ B\,\epsilon\,\alpha) \rightarrow (C)\ ((C\,\epsilon\,AB) \rightarrow (C\,\epsilon\,\alpha))].$$

Определение 1. Если все точки прямой принадлежат плоскости, то и сама прямая принадлежит этой плоскости.

Ввиду того, что по смыслу этого определения принадлежность прямой к плоскости можно истолковать и как включение множества точек прямой в множество точек плоскости (первое множество — подмножество второго), обозначим принадлежность прямой к плоскости уже известным нам символом отношения включения одного множества в другое и высказывание «прямая a принадлежит плоскости α» запишем символически так: «$a \subset \alpha$».[1]

Определение 1 может быть записано следующим образом:

$$(a \subset \alpha) \overset{df}{\longleftrightarrow} (A)[(A\epsilon a) \rightarrow (A\epsilon\alpha)].$$

Символ «$\overset{df}{\longleftrightarrow}$» нам уже знаком. Он означает, что эта эквивалентность устанавливается самим определением. В этой записи наглядно выступает роль определения, как сокращения сложной конструкции

$$(A)[(A\epsilon a) \rightarrow (A\epsilon\alpha)]$$

из объектов и отношений заменой ее новым отношением

$$a \subset \alpha.$$

I.5. Если две плоскости имеют общую точку (т. е. такую, которая лежит на каждой из них), то они имеют еще одну общую точку:

$$(\alpha,\ \beta)\ [(\exists\ A)(A\,\epsilon\,\alpha,\ \beta) \rightarrow (\exists\ B)(B\,\epsilon\,\alpha,\ \beta)].$$

I.6. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости:

$$(\exists\ (A,\ B,\ C,\ D))(\overline{\exists\ \alpha})(A,\ B,\ C,\ D\,\epsilon\,\alpha).$$

---

[1] Можно, разумеется, пользоваться и символом $a \in \alpha$, считая при этом, что прямая a принадлежит множеству прямых, образующих плоскость α.

03. Приступим к выводу следствий из аксиом принадлежности I.1—6, т. е. к доказательству первых теорем.

При доказательстве теорем мы имеем право пользоваться только теми свойствами принадлежности основных объектов (точек, прямых и плоскостей), которые выражены в принятых нами аксиомах. Поэтому мы можем выполнить эти доказательства и без чертежа, особенно если они не связаны с длинными рассуждениями. Хотя в более сложных доказательствах чертеж играет важную вспомогательную роль, мы никогда не должны ссылаться на какое-нибудь подсказанное чертежом свойство, которое не содержится ни в аксиомах, ни в ранее доказанных теоремах.

Среди теорем, которые мы сейчас докажем, некоторые уже известны нам из планиметрии. Но нас интересует, как они выводятся из принятых аксиом. Теоремы будем обозначать буквой Т с соответствующим порядковым номером.

Т.1. Две прямые могут иметь не более одной общей точки.

$$(a,\ b)\overline{(\exists(A,\ B))}\,[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)].$$

Допустим, что какие-нибудь две прямые a и b имеют две общие точки A и B. Это является точным отрицанием доказываемого предложения:

$$\overline{(a,\ b)(\overline{\exists(A,\ B)})}[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (\exists(a,\ b))(\exists(A,\ B))[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)].$$

Мы получили, что существуют две точки A и B, через которые проходят две (различные) прямые a и b:

$$(\exists\,(A,\ B))(\exists(a,\ b))[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)],$$

что противоречит требованию единственности, вытекающему из аксиомы I.1:

$$(\exists\,(A,\ B))(\exists\,(a,\ b))[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \overline{(A,\ B)(\overline{\exists(a,\ b)})}[(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in b)].$$

(Другой, непосредственный вывод Т.1 путем преобразования формулы, выражающей вторую часть аксиомы I.1 показан раньше (ч. I, гл. 5.13), где доказана эквивалентность Т. 1 второй части I.1.)

03.1. Можно, разумеется, более детально разъяснить на примере приведенного доказательства, как полученное «противоречие доказывает теорему».

Так как аксиома принимается за истинное высказывание, то полученное отрицание аксиомы I.1 ложно (закон противоречия). Но это отрицание, как мы показали, эквивалентно отрицанию доказываемого предложения. Следовательно, отрицание доказываемого предложения ложно, поэтому само доказываемое предложение истинно (закон исключенного третьего).

Следствие. Две различные прямые либо не имеют общей точки, либо имеют только одну общую точку.

Определение 2. Две прямые, имеющие только одну общую точку, называются пересекающимися.

Высказывание «прямые a и b — пересекающиеся» обозначим символом «$a \times b$». Общая точка двух пересекающихся прямых называется их точкой пересечения. Но с теоретико-множественной позиции точка пересечения двух прямых — пресечение двух множеств точек, поэтому высказывание «точка A есть точка пересечения прямых a и b» можем обозначить символом $A \equiv a \cap b$.

Т.2. Если точка C не лежит на прямой AB, то точки A, B, C не принадлежат одной прямой, т. е. не существует прямой, проходящей через точки A, B, C:

$$(A,\ B,\ C)[\overline{C \in AB} \rightarrow (\overline{\exists a})(A,\ B,\ C \in a)].$$

Действительно, если существовала бы такая прямая a, то она была бы отличной от AB, так как прямая AB не проходит через точку C. Тогда для двух точек A и B существовали бы две прямые (различные) AB и a, проходящие через них, что противоречит I.1:

$$\overline{C \in AB} \wedge (\exists a)(A, B, C \in a) \rightarrow \overline{a \equiv AB},$$

но по I.1:

$$(A, B \in a) \rightarrow (a \equiv AB).$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, хотя бы один из членов конъюнкции ложный. Так как $\overline{C \in AB}$ — посылка, то ложно

$$(\exists a)(A, B, C \in a)$$

или истинно

$$(\overline{\exists a})\ (A,\ B,\ C \in a).$$

Т.3. Существует единственная плоскость, проходящая через любую прямую и точку вне ее.

Выражение «существует единственная (или существует одна и только одна) плоскость» показывает, что формулировка теоремы представляет собой конъюнкцию двух высказываний, одно из которых выражает существование, а другое — единственность плоскости:

$$(a, C)[\overline{C \in a} \to (\exists\,\alpha)(C,\ a \in \alpha) \wedge (\beta)((C,\ a \in \beta) \to (\beta \equiv \alpha))].$$

(«Для всякой прямой a и точки C вне ее существует плоскость α, проходящая через прямую a и точку C, и всякая плоскость β, обладающая этим же свойством, совпадает с плоскостью α», т. е. более одной такой плоскости не существует.)

Пусть дана прямая a и точка C вне ее. Так как по аксиоме I.2 на всякой прямой существует бесконечное множество точек, возьмем на прямой a две точки A и B. Так как точка C не принадлежит прямой a, или AB, то точки A, B, C не лежат на одной прямой (Т.2), и согласно I.3 существует единственная плоскость α, проходящая через эти три точки. Так как точки A и B прямой a принадлежат плоскости α, то по I.4 все точки прямой a принадлежат этой плоскости, и по определению 1 прямая a принадлежит плоскости α, или плоскость α проходит через прямую a. Всякая плоскость β, проходящая через a и C, пройдет через A, B и C и согласно требованию единственности из I.3 совпадет с плоскостью α.

Приведенное доказательство символически запишется следующим образом:

$$(\exists(A,\ B))(A,\ B \in a);\ (\text{I. } 2) \tag{1}$$

$$\overline{C \in a} \wedge (A, B \in a) \to \overline{(\exists b)}(A, B, C \in b);\ (\text{T. } 2) \tag{2}$$

$$\overline{(\exists b)}\,(A, B, C \in b) \to (\exists\,\alpha)(A, B, C \in \alpha) \wedge$$

$$\wedge\ (\beta)[(A, B, C \in \beta) \to (\beta \equiv \alpha)];\ (\text{I. } 3) \tag{3}$$

$$(A,\ B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \to (a \subset \alpha);\ (\text{I. } 4,\ \text{опр. } 1) \tag{4}$$

$$\overline{C \in a} \to (\exists\,\alpha)(a, C \in \alpha) \wedge (\beta)[(a, C \in \beta) \to (\beta \equiv \alpha)]. \tag{5}$$

Т. 4. Для любых двух пересекающихся прямых существует одна и только одна плоскость, проходящая через них.

$$(a, b)[(a \times b) \to (\exists\,\alpha)(a, b \subset \alpha) \wedge (\beta)((a, b \subset \beta) \to (\beta \equiv \alpha))].$$

Пусть $a \times b$ и $a \cap b \equiv M$. Берем точку A на прямой a и точку B на прямой b (I.2), отличные от M. Так как B отлична от M, то B не лежит на прямой a (Т.1), и три точки A, B, M не лежат на одной прямой (Т. 2). Следовательно, существует единственная плоскость ABM, проходящая через эти точки

(I.3). Каждая из прямых a и b лежит в этой плоскости, так как имеет с ней две общие точки (I.4, опр. 1).

Всякая плоскость β, проходящая через прямые a и b, проходит также через точки A, B, M и, следовательно, совпадает с плоскостью ABM (I.3).

03.2. Сопоставление этого и других приведенных здесь доказательств с обычно приводимыми в школьной практике обнаруживает, что они находятся на более высоком логическом уровне, в них меньше логических пробелов. В частности, в доказательстве последней теоремы (Т. 4) в школьных учебниках обычно не доказывается, что точка B не лежит на прямой a и что точки A, B, M не лежат на одной прямой, это все «очень хорошо видно из чертежа». Таким образом, чертеж играет не только положительную, но и отрицательную роль в доказательстве.

Определение 3. Две прямые называются п а р а л л е л ь н ы м и, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки.

Высказывание «прямая a параллельна прямой b» записывается символически так: «$a \| b$».

03.3. Выражение «прямые a и b лежат в одной плоскости» надо понимать в смысле «существует плоскость, в которой лежат обе прямые a и b»:

$$(\exists\, \alpha)(a,\ b \subset \alpha).$$

Выражение «прямые a и b не имеют общей точки» надо понимать в смысле «не существует точки, принадлежащей прямой a и прямой b»:

$$\overline{(\exists\, A)}(A \in a,\ b).$$

Так как по определению прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда удовлетворяются оба условия, то это определение может быть записано символически следующим образом:

$$(a \parallel b) \overset{df}{\leftrightarrow} (\exists\, \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \wedge \overline{(\exists\, A)}(A \in a,\ b).$$

Каждое из двух условий, входящих в определение параллельности, является необходимым условием параллельности:

$$[(a \parallel b) \rightarrow (\exists\, \alpha)(a,\ b \subset \alpha)] \wedge [(a \parallel b) \rightarrow \overline{(\exists\, A)}(A \in a, b)],$$

и они только вместе (т. е. их конъюнкция) составляют достаточное условие:

$$(\exists\, \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \wedge \overline{(\exists\, A)}(A \in a,\ b) \rightarrow (a \parallel b).$$

Так как параллельность определяется конъюнкцией двух условий, то прямые не параллельны, когда не удовлетворяется хотя бы одно из этих условий:

$$\overline{a \parallel b} \leftrightarrow \overline{(\exists \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \wedge (\overline{\exists} A)(A \in a,\ b)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\overline{\exists} \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \vee (\exists A)(A \in a,\ b).$$

(Здесь применяется правило отрицания конъюнкции: отрицание конъюнкции двух высказываний эквивалентно дизъюнкции отрицаний этих высказываний.)

Возникает вопрос о существовании двух прямых, не лежащих в одной плоскости, т. е. таких, для которых не существует плоскости, проходящей через них. На моделях вокруг нас мы встречаем много таких пар прямых. Нас же интересует и вопрос о том, как существование таких прямых вывести логическим путем из аксиом и доказанных ранее теорем.

Т.5. Существуют две прямые, не лежащие в одной плоскости, т. е. такие, что никакая плоскость не проходит через них.

$$(\exists (a,\ b))(\overline{\exists} \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \quad \text{или} \quad (\exists\,(a,\ b))(\alpha)\ \overline{a,\ b \subset \alpha}.$$

Действительно, пусть $A,\ B,\ C,\ D$ — четыре точки, не лежащие в одной плоскости (существование таких четырех точек обеспечивается аксиомой I.6). Тогда не существует плоскости, проходящей через прямые AB и CD. Если бы такая плоскость существовала, то по определению 1 точки $A,\ B,\ C,\ D$ лежали бы в этой плоскости:

$$(\exists \alpha)(AB,\ CD \subset \alpha) \rightarrow (\exists \alpha)(A,\ B,\ C,\ D \in \alpha).$$

Отсюда по правилу контрапозиции получаем:

$$(\overline{\exists} \alpha)(A,\ B,\ C,\ D \in \alpha) \rightarrow (\overline{\exists} \alpha)(AB,\ CD \subset \alpha).$$

Следствие из Т.4. Две прямые, не лежащие в одной плоскости, не имеют общей точки.

Действительно,

$$(\exists A)(A \in a,\ b) \rightarrow (\exists \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \qquad (\text{Т. } 4)$$

и по правилу контрапозиции:

$$(\overline{\exists} \alpha)(a,\ b \subset \alpha) \rightarrow (\overline{\exists} A)(A \in a,\ b).$$

Определение 4. Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются с к р е щ и в а ю щ и м и с я.

Высказывание «прямые a и b скрещиваются» обозначим символом «$a \rightthreetimes b$». Определение скрещивающихся прямых можно символически записать так:

$$(a \rightthreetimes b) \overset{df}{\leftrightarrow} (\overline{\exists\alpha})(a,\ b \subset \alpha).$$

03.4. Можно здесь поставить перед учащимися вопрос, почему в это определение мы не включаем условие отсутствия общей точки, а в определение параллельных прямых мы включили это условие.

Мы получили в результате доказанных выше теорем полную картину взаимных расположений двух прямых в пространстве и можем классифицировать их. Классификацию производим по двум основаниям:

1) существование плоскости, которой принадлежат обе прямые (обозначим высказывание $(\exists\alpha)(a,\ b \subset \alpha)$ через X);

2) существование общей точки двух прямых (обозначим высказывание $(\exists A)(A \in a,\ b)$ через Y).

Получаем следующую схему:

Две прямые
$(a,\ b)$

- X (лежат в одной плоскости)
  - Y → (имеют общую точку) $a \times b$
  - $\overline{Y}$ → (не имеют общей точки) $a \parallel b$
- $\overline{X}$ (не лежат в одной плоскости)
  - → (прямые a и b скрещиваются) $a \rightthreetimes b$

Выясним всевозможные взаимные расположения прямой и плоскости.

Т.6. Плоскость и прямая, не лежащая в ней, не могут иметь более одной общей точки.

$$(\alpha,\ a)[\overline{a \subset \alpha} \rightarrow (\overline{\exists\,(A,\ B)})((A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in \alpha))]^1.$$

Действительно, если плоскость и прямая имели бы две общие точки, то прямая лежала бы в этой плоскости (I. 4 опр. 1), что противоречит условию.

Символически это доказательство запишется так:
из

$$(\alpha,\ a)[(\exists\,(A,\ B))(A,\ B \in a) \wedge (A,\ B \in a) \rightarrow (a \subset \alpha)]$$

---

[1] Другой вид записи:
$(\alpha,\ a)\,[\overline{a \subset \alpha} \wedge (\exists A)\,(A \in a,\ \alpha) \rightarrow (B)\,((B \in a,\ \alpha) \rightarrow (B \equiv A))]$.

по правилу контрапозиции следует

$$(\alpha, a)[\overline{a \subset \alpha} \to \overline{(\exists(A, B))}((A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha))].$$

Определение 5. Плоскость и прямая называются **пересекающимися**, если они имеют только одну общую точку. Эта общая точка называется их **точкой пересечения**.

Высказывание «плоскость α и прямая a пересекаются» обозначим символом «$\alpha \times a$» или «$a \times \alpha$» (симметричность этого отношения непосредственно следует из определения). Так как плоскость и прямая представляют собой два множества точек, то их точка пересечения является общей частью этих множеств, т. е. их пересечением. Поэтому высказывание «A — точка пересечения плоскости α и прямой a» можно записать так: $A \equiv \alpha \cap a$.

Данное определение можно записать символически так:

$$(\alpha \times a) \overset{df}{\leftrightarrow} (\exists A)(A \in a, \alpha) \wedge (B) [(B \in a, \alpha) \to (B \equiv A)].$$

Определение 6. Плоскость и прямая, не имеющие общей точки, называются **параллельными**.

Высказывание «плоскость α и прямая a параллельны» обозначим «$\alpha \| a$» или «$a \| \alpha$» (симметричность этого отношения непосредственно следует из определения).

Определение параллельности прямой и плоскости может быть записано символически так:

$$(a \parallel \alpha) \overset{df}{\leftrightarrow} (\overline{\exists} A)(A \in a, \alpha).$$

Получаем следующую классификацию взаимных расположений прямой и плоскости по числу общих точек:

Прямая и плоскость
(a, α)

- не имеют общей точки
  $a \parallel \alpha$
  (прямая параллельна плоскости)
- имеют общую точку
  - имеют только одну общую точку
    $a \times \alpha$
    (прямая пересекает плоскость)
  - имеют более одной общей точки: $a \subset \alpha$
    (прямая лежит в плоскости)

Выясним всевозможные взаимные расположения двух плоскостей.

Т.7. Две плоскости либо не имеют общей точки, либо имеют общую прямую и все общие точки этих плоскостей лежат на этой прямой:

$$(\alpha, \beta)[(\overline{\exists A})(A \in \alpha, \beta) \vee (\exists c)(c \subset \alpha, \beta) \wedge (C)((C \in \alpha, \beta) \rightarrow (C \in c))].$$

Действительно, любые две плоскости α и β либо не имеют общей точки, либо имеют общую точку A. В последнем случае они имеют еще одну общую точку B. Тогда прямая AB принадлежит и плоскости α и плоскости β (I.4, опр. 1), т. е. является общей прямой. Если плоскости α и β имели бы какую-нибудь общую точку C, не лежащую на прямой AB, то через прямую AB и точку C вне ее проходили бы две различные плоскости α и β, что противоречит Т.3.

Определение 7. Две плоскости, имеющие общую прямую, называются пересекающимися, а общая прямая — их линией пересечения.

Высказывание «плоскости α и β пересекаются» обозначим символом „$\alpha \times \beta$“ или „$\beta \times \alpha$“, а высказывание «a — линия пересечения плоскостей α и β» — символом «$a \equiv \alpha \cap \beta$».

Данное определение можно записать так:

$$(\alpha \times \beta) \overset{df}{\leftrightarrow} (\exists c)(c \subset \alpha, \beta).$$

Определение 8. Две плоскости, не имеющие общей точки, называются параллельными.

Высказывание «плоскости α и β параллельны» обозначим „$\alpha \parallel \beta$“ или „$\beta \parallel \alpha$“ (в теоретико-множественной символике это можно записать и так: „$\alpha \cap \beta = \varnothing$“). Определение параллельности плоскостей запишется так:

$$(\alpha \parallel \beta) \overset{df}{\leftrightarrow} \overline{\exists}(C)(C \in \alpha, \beta).$$

Получаем следующую классификацию взаимных расположений двух плоскостей:

Две плоскости
(α, β)

не имеют общей точки (параллельные плоскости) $\alpha \parallel \beta$	имеют общую точку (пересекающиеся плоскости, Т. 7) $\alpha \times \beta$

04. Мы рассматриваем множество точек прямой как упорядоченное множество. Отношение порядка точек на прямой обозначим термином «предшествовать» и символом „$\prec$“, т. е. высказывание «точка A предшествует точке B» условимся записывать так: «$A \prec B$».

Это отношение характеризуется следующими аксиомами, которые мы называем аксиомами порядка:

II.1. Для любых двух различных точек A, B либо $A \prec B$, либо $B \prec A$, и только одно из двух.

$$(A, B)[\overline{A \equiv B} \to (A \prec B) \dot{\vee} (B \prec A)].$$

Представляя собой строгую дизъюнкцию, эта аксиома может быть выражена в виде конъюнкции двух высказываний:

$$(A, B)[\overline{A \equiv B} \to (A \prec B) \vee (B \prec A)] \wedge \overline{(A \prec B) \wedge (B \prec A)},$$

причем второй член этой конъюнкции выражает антисимметричность отношения предшествования.

II.2. Для любых трех точек прямой A, B, C, если $A \prec B$ и $B \prec C$, то $A \prec C$ (транзитивность отношения предшествования):

$$(A, B, C)[(C \in AB) \to ((A \prec B) \wedge (B \prec C) \to (A \prec C))].$$

II.3. Для любых двух различных точек A, B на прямой AB существует точка C такая, что A предшествует C и C предшествует B или B предшествует C и C предшествует A.

Конъюнкцию $(A \prec C) \wedge (C \prec B)$ будем писать сокращенно $A \prec C \prec B$. Тогда аксиома II.3 запишется символически следующим образом:

$$(A, B)[\overline{A \equiv B} \to (\exists C)(C \in AB) \wedge ((A \prec C \prec B) \vee (B \prec C \prec A))].$$

Определение 9. Если точка C удовлетворяет одному из соотношений $A \prec C \prec B$ или $B \prec C \prec A$, мы говорим, что точка C лежит между точками A и B.

II.4. На прямой нет точки, которая предшествовала бы всем остальным, и нет точки, которой предшествовали бы все остальные. (Множество точек прямой не имеет ни первого ни последнего элемента.)

$$(a)[\overline{(\exists_{A \in a} A)(B)_{B \in a}(A \prec B)} \wedge \overline{(\exists_{C \in a} C)(B)_{B \in a}(B \prec C)}].$$

Аксиомы II.1—4 характеризуют структуру порядка в множестве точек прямой, установленную с помощью отношения предшествования.

Определение 10. Множество точек, лежащих между точками A и B вместе с точками A и B называется отрезком AB.

Точки, лежащие между A и B, называются внутренними точками или просто точками отрезка AB, точки A и B — его концами.

Как видно, понятие отрезка определено с помощью отношения «лежать между», а это отношение определено с помощью отношения «предшествовать» (опр. 9); отношение же «предшествовать» принято нами за основное, первоначальное, и поэтому неопределяемо через другие отношения, оно получает косвенное определение с помощью характеризующих его аксиом.

При помощи понятия отрезка мы обосновываем часто применяемые выражения «по одну сторону» и «по разные стороны» от данной точки, т. е. понятие полупрямой.

Т.8. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими. (Это предложение не менее очевидно, чем аксиомы, но так как оно не содержится в списке аксиом, оно должно быть доказано. Таков закон аксиоматического построения теории.)

Пусть на прямой даны три точки A, B, C. Применим к точкам A и B аксиому II.1 и допустим для определенности, что $A \prec B$. Возьмем далее точки B и C и применим к ним ту же аксиому II.1. Возможны два случая: *а)* $B \prec C$ и так как $A \prec B$, то B лежит между A и C; *б)* $C \prec B$. В этом случае рассмотрим отношение между точками A и C. Аксиома II.1 дает два случая: *б*$_1$) $A \prec C$ и так как $C \prec B$, то C лежит между A и B; *б*$_2$) $C \prec A$ и так как $A \prec B$, следовательно, A лежит между B и C.

Мы доказали, что во всех случаях одна из трех точек прямой лежит между двумя другими, и так как по аксиоме II.1 случаи *а* и *б*, а также подслучаи *б*$_1$ и *б*$_2$ несовместимы, то следует единственность такой точки.

Т.9. Любая точка O прямой разбивает множество точек этой прямой на два подмножества так, что любые две точки прямой A, B, отличные от O, либо принадлежат одному из этих подмножеств, если отрезок AB не содержит точку O, либо принадлежат различным подмножествам, если отрезок AB содержит точку O.

Возьмем две произвольные, отличные от O, точки прямой A и B. По Т.8 возможны следующие случаи:

а) O лежит между A и B, т. е. O — точка отрезка AB, значит A и B принадлежат различным подмножествам точек;

б) B лежит между A и O;

в) A лежит между B и O; в последних двух случаях по Т.8 точка O не лежит между A и B, т. е. не является точкой отрезка AB, значит A и B принадлежат одному подмножеству,

Несовместимость этих случаев (Т.8) является доказательством того, что каждая точка прямой, отличная от точки O, принадлежит лишь одному из этих подмножеств, ибо точка B не может одновременно принадлежать тому же подмножеству, что и точка A, и другому, это означало бы, что случай *а* совместим с одним из случаев *б* или *в*.

Определение 11. Два подмножества точек, определяемых на прямой точкой O, называются полупрямыми или лучами этой прямой с началом O.

Если две точки прямой A и B принадлежат одной из этих полупрямых, то говорят, что они «лежат по одну сторону от точки O», если же они принадлежат различным полупрямым, говорят, что они «лежат по разные стороны от точки O».

04.1. Т.8 и Т.9 показывают учащимся, что очевидность этих предложений в аксиоматическом построении теории не принимается в качестве довода для обоснования их истинности. Мы здесь, разумеется, не можем устранить все те логические пробелы, которые имелись в построении планиметрии и которые неизбежны на определенном этапе обучения. Мы и здесь далеко не все доказываем (например, мы не доказали, что множество точек любого отрезка бесконечно, хотя мы пользуемся по-прежнему этим положением, как интуитивно ясным) и не должны создавать у учащихся иллюзию логического совершенства нашего построения. Мы должны говорить учащимся, что ряд предложений мы не доказываем, хотя они доказуемы в нашей системе. Наша цель, как уже было ранее разъяснено, дать учащимся представление о логической организации теории при ее аксиоматическом построении.

Как мы уже говорили, аксиомы II.1—4 характеризуют порядок точек на прямой. Для определения порядка точек на плоскости вводится еще одна аксиома.

II.5. Всякая прямая *a* плоскости разбивает множество всех точек этой плоскости, не принадлежащих ей, на два класса (подмножества), обладающие следующим свойством: если две точки принадлежат различным классам, то отрезок, определяемый этими точками, пересекается прямой *a*; если же две точки принадлежат одному классу, то отрезок, определяемый ими, не пересекается прямой *a*.

Под «разбиением множества на два класса (или подмножества)» надо понимать, что, во-первых, каждая точка этого множества принадлежит одному и только одному из этих классов и, во-вторых, каждый класс не пуст, т. е. содержит точки данного множества (иначе, если один из классов был бы пуст, мы не получили бы разбиение на два класса).

Определение 12. Два класса точек, определяемых прямой на плоскости, называются полуплоскостями этой плоскости с ребром *a*.

О двух точках, принадлежащих одной из этих полуплоскостей, говорят, что они «лежат по одну сторону от прямой *a*». О двух точках, принадлежащих различным полуплоскостям, говорят, что они «лежат по разные стороны от прямой *a*».

Т.10 (предложение Паша). Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Любая прямая a плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C, либо не пересекает ни один из отрезков AB, BC, AC, либо пересекает два и только два из этих отрезков. (Когда мы говорим, например, «прямая a пересекает отрезок AB», то это значит, что прямая a пересекается с прямой AB в точке отрезка AB, т. е. в точке, лежащей между A и B.)

На чертеже (рис. 24) истинность Т.10 очевидна. Приведем логическое доказательство, не пользуясь чертежом. (Можно, разумеется, пользоваться и чертежом, но так как он фиксирует определенное расположение прямой a относительно отрезков AB, BC, AC, то не помогает здесь общим рассуждениям.)

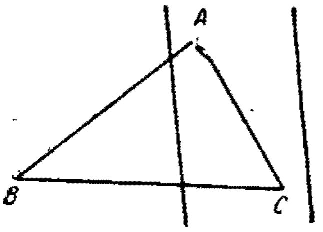


Рис. 24.

Прямая a либо не имеет общей точки ни с одним из отрезков AB, BC, AC, либо имеет общую точку с одним из этих отрезков. В первом случае теорема доказана. Докажем ее во втором случае, т. е. когда прямая a имеет общую точку с одним из отрезков AB, BC, AC. Пусть, например, прямая a пересекает отрезок AB. Тогда согласно аксиоме II.5, точки A и B принадлежат различным полуплоскостям, определяемым прямой a на плоскости ABC. Так как по той же аксиоме (II.5) точка C принадлежит либо той полуплоскости, в которой лежит точка A, либо другой, в которой лежит точка B, и только одной из них, то прямая a пересекает еще либо отрезок BC, либо отрезок AC и только один из них. Таким образом, прямая a либо не пересекает ни один из отрезков AB, BC, AC, либо пересекает два и только два из них.

Теорема доказана. В этом доказательстве мы ссылались на II.5.

Если утверждение, составляющее содержание доказанной теоремы, принять за аксиому, то предложение II.5 может быть доказано как теорема. Это доказательство может быть предложено учащимся на внеклассных занятиях.

Таким образом, предложения II.5 и Т.10 эквивалентны.

04.2. В пространстве имеет место предложение, аналогичное аксиоме II.5: «Всякая плоскость α делит множество всех точек пространства, ей не принадлежащих, на два класса так, что если две точки принадлежат различным классам, то отрезок, определяемый ими, пересекается плоскостью α, если же две точки принадлежат одному классу, то определяемый ими отрезок не пересекается этой плоскостью».

Эти два класса точек называются *полупространствами* с общей гранью α.

Хотя это предложение является теоремой, оно может приниматься без доказательства, но об этом надо сказать учащимся. Иллюстрация этого предложения на модели весьма убедительна. Доказательство может быть предложено как самостоятельная работа на внеклассных занятиях.

05. Параллельность геометрических элементов в пространстве рассмотрим в следующем порядке:

1. Параллельность двух прямых.
2. Параллельность прямой и плоскости.
3. Параллельность двух плоскостей.

05.1. Мы уже уточнили выше (03) определение параллельности прямых.

05.1.1. В учебной и научной литературе встречается и другая трактовка отношения параллельности (двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей).[1] Согласно этой трактовке, совпадение элементов рассматривается как частный случай параллельности. После определения пересекающихся прямых, как таких, которые имеют только одну общую точку, параллельные прямые определяются как прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Таким образом, параллельность во втором смысле включает параллельность в первом смысле и совпадение.

При таком более широком понимании параллельность оказывается видом общелогического отношения эквивалентности, ибо обладает свойствами рефлексивности ($a \| a$, так как $a \equiv a$), симметричности $((a \| b) \rightarrow (b \| a))$ и транзитивности $((a \| b) \wedge (b \| c) \rightarrow (a \| c))$. Параллельность в первом смысле, т. е. не включающая совпадения, не обладает свойством рефлексивности.

Понятие параллельности во втором смысле, как видно, логически более выдержано, кроме того, упрощает формулировки некоторых теорем.

Однако при изучении планиметрии обычно (и вполне правомерно) параллельность трактуется в первом, более узком смысле, поэтому вряд ли стоит переучивать учащихся старших классов из-за упрощения формулировок некоторых теорем.

Мы знаем из планиметрии, как построить прямую, параллельную данной прямой a и проходящую через данную точку C вне этой прямой.

Возникает вопрос: сколько прямых, не пересекающихся с прямой a, проходят через точку C в плоскости, определяемой прямой a и точкой C? Из принятых ранее аксиом, оказывается, не следует единственность такой прямой. В таком случае, очевидно, одинаково допустимы две возможности: *а*) либо проходит только одна прямая, *б*) либо проходит более одной прямой.

05.1.2. Здесь учащиеся могут возразить: чертеж наглядно показывает, что второй возможности нет. Но чертеж этого не показывает. Действительно, если обычным способом провести через точку C, достаточно удаленную от прямой a, параллель к прямой a, затем провести через точку C еще одну прямую под очень малым углом (например, порядка 0,001″) к этой параллели, то мы на чертеже никакими построениями не сможем найти точку пересечения этой прямой с прямой a. Таким образом, опыт не опро-

[1] Густав Шоке. О преподавании элементарной геометрии. Сб. «Преподавание математики». Пер. с французского А. И. Фетисова. М., 1960; Günter Pickert. Ebene Inzidenzgeometrie. Hamburg, 1958.

вергает вторую возможность. Ее также нельзя опровергнуть логическим путем, исходя из принятых нами аксиом.

Первая возможность, и только она, была учтена Евклидом, когда он принял свою аксиому параллельных, известную нам из планиметрии.

Аксиома параллельных. Через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной.

$$(a,\ C)[\overline{C \in a} \to (\overline{\exists\,(b,\ c)})(C \in b,\ c) \wedge (b \parallel a) \wedge (c \parallel a) \wedge \overline{b \equiv c}].$$

(Если вместо «параллельной» говорить «не пересекающей», то необходимо добавить «в плоскости, определяемой данной прямой и точкой вне ее».)

05.1.3. Здесь уместно рассказать учащимся, что вторая возможность, состоящая в том, что через точку C вне прямой a, в плоскости, определяемой прямой a и точкой C, проходит более одной прямой, не пересекающей данную прямую a, оставалась неисследованной более двух тысяч лет, от Евклида до Лобачевского. Более того, ученые этого периода были уверены, что второй возможности вовсе нет, и стремились вывести евклидову аксиому параллельных как следствие из остальных аксиом, т. е. доказать ее как теорему. Но все эти попытки оказались безуспешными.

Великий русский ученый Н. И. Лобачевский (1793—1856) обнаружил вторую, равноправную с первой, возможность и, учитывая ее, присоединил к остальным аксиомам соответствующую этой возможности аксиому параллельных: «Через точку вне данной прямой, в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную».

На базе этой системы аксиом Лобачевский развил новую, н е е в к л и д о в у геометрию. Эта геометрия названа сейчас его именем — г е о м е т р и е й Л о б а ч е в с к о г о.

Ознакомление учащихся с жизнью и деятельностью Н. И. Лобачевского и с некоторыми положениями его геометрии является интересной темой для занятий математического кружка и для математического вечера учащихся старших классов.

Ввиду того, что этот материал достаточно широко освещается в различных изданиях научно-популярной литературы, а также в статьях из опыта внеклассной работы, мы не останавливаемся здесь на изложении содержания этих вопросов.

Мы уже выяснили, что две прямые в пространстве либо скрещиваются, либо пересекаются, либо параллельны:

$$(a,\ b)[(a \rightthreetimes b)\ \dot{\vee}\ (a \times b)\ \dot{\vee}\ (a \parallel b)].$$

Из определения параллельности непосредственно следует симметричность этого отношения:

$$(a,\ b)[(a \parallel b) \to (b \parallel a)].$$

Симметричностью обладает и отношение пересечения

$$(a,\ b)[(a \times b) \to (b \times a)],$$

и отношение скрещивания

$$(a, b)[(a \times b) \rightarrow (b \times a)].$$

Рассмотрим характеристическое свойство отношения параллельности, т. е. такое свойство, которым обладают параллельные прямые, но не обладают ни пересекающиеся, ни скрещивающиеся прямые. Это свойство составляет содержание следующих двух теорем.

Т.11. Если две прямые параллельны, то всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую:

$$(a, b)[(a \parallel b) \rightarrow (\alpha)((\alpha \times a) \rightarrow (\alpha \times b))].$$

Доказательство

1. $(a \parallel b) \rightarrow (\exists \beta)(a, b \subset \beta)$.

1. Пусть имеем пару параллельных прямых a и b, которые (по определению) лежат в одной плоскости β (рис. 25).

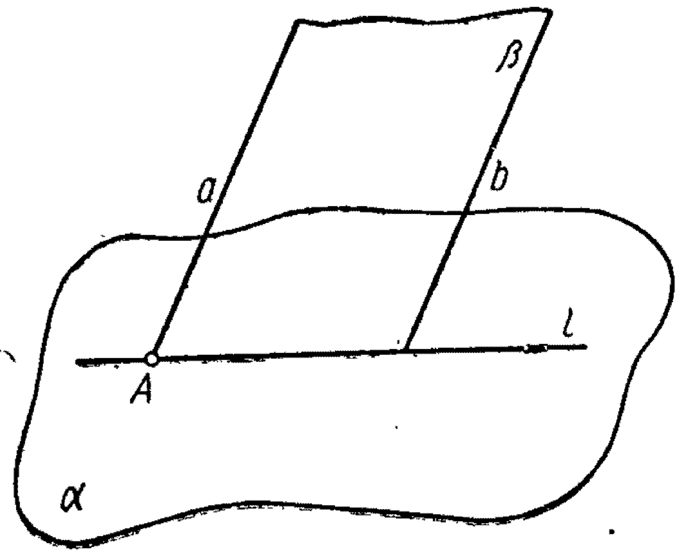


Рис. 25.

2. $(\alpha \times a) \rightarrow (\exists A)(A \in a, \alpha)$; $(A \in a) \wedge (a \subset \beta) \rightarrow (A \in \beta)$.

2. Положим, что некоторая плоскость α пересекает прямую a в точке A.

3. $(A \in \alpha, \beta) \rightarrow$ $\rightarrow (\exists l)(l \subset \alpha, \beta) \wedge (A \in l)$.

3. Плоскости α и β имеют общую точку A, следовательно (Т.7), имеют и общую прямую, проходящую через эту точку.

4. $(A \in a, l) \rightarrow (a \times l)$.

4. Так как точка A принадлежит прямым a и l, то эти прямые пересекаются.

5. $(a, b, l \subset \beta) \wedge$ $\wedge (l \times a) \wedge (a \parallel b) \rightarrow (l \times b)$;

5. Так как три прямые a, b и l лежат в одной плоскости β

$(l \times b) \to (\exists\ B)(B \in l, b)$.

и прямая l пересекает одну из параллельных прямых (a), то она пересекает и другую (b), ибо иначе через точку A проходили бы две различные прямые a и l, обе параллельные прямой b, что противоречит аксиоме параллельных.

6. $(B \in l) \wedge (l \subset \alpha) \to (B \in \alpha)$.

6. Так как точка B принадлежит прямой l, а прямая l лежит в плоскости α, то точка B лежит в плоскости α (опр. 1).

7. $(B \in b, \alpha) \to (\alpha \times b)$.

7. Так как точка B принадлежит плоскости α и прямой b, то плоскость α пересекает и прямую b.

Так как мы взяли произвольную плоскость α, пересекающую прямую a, и доказали, что она пересекает и прямую b, то теорема доказана.

Эта теорема выражает необходимое условие параллельности двух прямых. Более наглядно это обнаруживается, если заменить ее по правилу контрапозиции теоремой противоположной — обратной:

$$\overline{(\alpha)[(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)]} \to \overline{a \parallel b},$$

$$\text{или } (\exists\, \alpha)\overline{[(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)]} \to \overline{a \parallel b},$$

$$\text{или } (\exists\, \alpha)[(\alpha \times a) \wedge \overline{\alpha \times b}] \to \overline{a \parallel b} \text{ для любых } a \text{ и } b.$$

(Если существует плоскость, пересекающая одну из прямых a или b и непересекающая другую, то прямые непараллельны.)

Т.12 (обратная Т.11). Если всякая плоскость, пересекающая одну из двух прямых (произвольных), пересекает и вторую, то эти прямые параллельны.

$$(a, b)[(\alpha)((\alpha \times a) \to (\alpha \times b)) \to (a \parallel b)].$$

Доказательство

1. $\overline{a \parallel b} \to$
$\to (\exists\alpha)\overline{[(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)]}$;
$\overline{a \parallel b} \to (\exists\alpha)[(\alpha \times a) \wedge$
$\wedge\ (\overline{\alpha \times b})]$.

1. Заменим по правилу контрапозиции доказываемую теорему равносильной ей противоположной — обратной: «если прямые a и b непараллельны,

то существует плоскость, пересекающая одну из этих прямых и не пересекающая другую».

$$2.\ \overline{a \parallel b} \to [(a \times b) \vee (a \leftthreetimes b)].$$

2. Если прямые a и b непараллельны, то они либо пересекаются, либо скрещиваются.

$$3.\ (a \times b) \to (\exists \alpha)[(\alpha \times a) \wedge \overline{\alpha \times b}].$$

3. Если $a \times b$, то любая плоскость, проходящая через прямую b, отличная от плоскости, определяемой прямыми a и b (Т.4), пересекает a, но не пересекает b (опр. 5).

$$4.\ (a \leftthreetimes b) \to (\exists \alpha)[(\alpha \times a) \wedge \overline{\alpha \times b}].$$

4. Если $a \leftthreetimes b$, то плоскость, проходящая через прямую b и произвольную точку A прямой a, пересекает прямую a и не пересекает b (опр. 4).

$$5.\ (a \times b) \vee (a \leftthreetimes b) \to (\exists \alpha)[(\alpha \times a) \wedge \overline{\alpha \times b}];$$
$$\overline{(\exists \alpha)[(\alpha \times a) \wedge \overline{\alpha \times b}]} \to (\overline{a \times b} \wedge \overline{a \leftthreetimes b});$$
$$(\alpha)[(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)] \to (\alpha \parallel b).$$

5. Мы доказали, что если прямые a и b пересекаются или скрещиваются, то существует плоскость, пересекающая одну из них и не пересекающая другую, а это означает (согласно принципу контрапозиции), если такой плоскости нет, т. е. если каждая плоскость, пересекающая одну из прямых, пересекает и другую, то эти прямые не пересекаются и не скрещиваются, т. е. параллельны.

Эта теорема выражает достаточное условие параллельности двух прямых.

Таким образом, условие, необходимость которого доказана Т.11, а достаточность — Т.12, является **необходимым и достаточным** условием, или **признаком**, параллельности прямых.

Т.11 и Т.12 могут быть сформулированы объединенно следующим образом: «Для того чтобы две прямые были параллельны, **необходимо и достаточно**, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую» или «две прямые параллельны, **если и только если** всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую».

Эта объединенная формулировка представляет собой конъюнкцию

$$[(\alpha)((\alpha \times a) \to (\alpha \times b)) \to (a \parallel b)] \wedge [(a \parallel b) \to (\alpha)((\alpha \times a) \to (\alpha \times b))],$$

или эквивалентность

$$(\alpha)[(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)] \leftrightarrow (a \parallel b).$$

0.5.1.4. Как известно, характеристическое свойство объекта или отношения может служить для определения этого объекта или отношения.

Можно предложить учащимся следующую задачу: две прямые будем считать, по определению, параллельными, если всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую. Исходя из этого определения, доказать, что: 1) всякие две параллельные прямые лежат в одной плоскости и 2) не имеют общей точки, т. е. исходя из

$$(a \parallel b) \overset{df}{\longleftrightarrow} (\alpha)\, [(\alpha \times a) \to (\alpha \times b)],$$

доказать: 1) $(a \parallel b) \to (\exists\, \alpha)\, (a,\ b \subset \alpha)$;

2) $(a \parallel b) \to (\overline{\exists\, A})\, (A \in a,\ b)$.

Доказанный выше признак параллельности прямых (Т.11, Т.12) позволяет весьма просто доказать свойство транзитивности параллелизма в пространстве.

Следствие. Если прямая a параллельна прямой b и прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

$$(a,\ b,\ c)[(a \parallel b) \wedge (b \parallel c) \to (a \parallel c)].$$

Доказательство

Возьмем произвольную плоскость α, пересекающую прямую a.

$$(a \parallel b) \wedge (\alpha \times a) \to (\alpha \times b) \quad (\text{по Т. 11}),$$

$$(b \parallel c) \wedge (\alpha \times b) \to (\alpha \times c) \quad (\text{по Т. 11}).$$

Мы доказали, что произвольная плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую c, т. е.

$$(\alpha)[(\alpha \times a) \to (\alpha \times c)].$$

Из этого предложения и Т.12 по правилу заключения следует $a \parallel c$.

05.2. Мы уже определили параллельность прямой и плоскости (опр. 6). Существование прямой, параллельной плоскости, доказывается следующей теоремой, выражающей признак параллельности прямой и плоскости.

Т.13. Для того чтобы прямая вне плоскости была параллельна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была параллельна какой-нибудь прямой, принадлежащей этой плоскости.

Доказательство

1) Докажем достаточность сформулированного условия, т. е.

$$(a, \alpha)[\overline{a \subset \alpha} \wedge (a \parallel b) \wedge (b \subset \alpha) \rightarrow (a \parallel \alpha)] \text{ (рис. 26).}$$

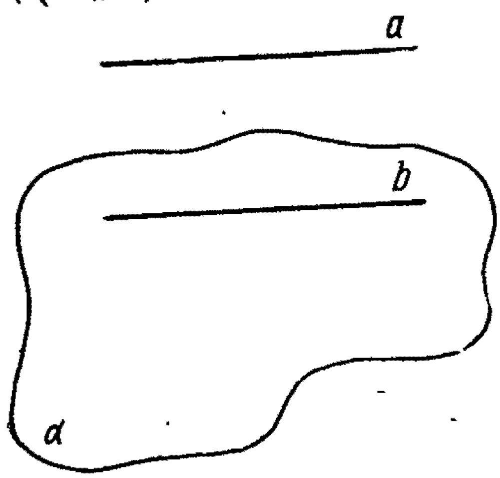


Рис. 26.

Пусть $\overline{a \parallel \alpha}$.

1. $\overline{a \subset \alpha} \wedge \overline{a \parallel \alpha} \rightarrow (a \times \alpha)$;

1. Так как $\overline{a \subset \alpha}$ и $\overline{a \parallel \alpha}$ (по допущению), то $a \times \alpha$ (исходя из классификации взаимных расположений прямой и плоскости).

2. $(\alpha \times a) \wedge (a \parallel b) \rightarrow (\alpha \times b)$; $(\alpha \times b) \rightarrow \overline{b \subset \alpha}$.

2. Так как $a \times \alpha$ и $a \parallel b$ (по условию), то $\alpha \times b$ (Т. 11), т. е. $\overline{b \subset \alpha}$.

Мы получили:

$$\overline{a \subset \alpha} \wedge (a \parallel b) \wedge \overline{a \parallel \alpha} \rightarrow \overline{b \subset \alpha}.$$

Отсюда по правилу расширенной контрапозиции получаем:

$$\overline{a \subset \alpha} \wedge (a \parallel b) \wedge (b \subset \alpha) \rightarrow (a \parallel \alpha),$$

т. е. то, что требовалось доказать.

2) Докажем необходимость сформулированного условия, т. е.

$$(a, \alpha)[(a \parallel \alpha) \rightarrow (\exists b)(b \subset \alpha) \wedge (a \parallel b)].$$

Для доказательства достаточно найти такую прямую, которая лежала бы в плоскости α и была бы параллельной прямой a.

1. $A \in \alpha$;	1. Возьмем на плоскости α произвольную точку A.
2. $(b \parallel a) \wedge (A \in b)$;	2. Проводим через точку A прямую b, параллельную прямой a.
3. $(A \in \alpha, b) \to \overline{b \parallel a}$;	3. Прямая b и плоскость α имеют общую точку, поэтому они непараллельны.
4. $\overline{b \parallel \alpha} \to (b \times \alpha) \dot{\vee} (b \subset \alpha)$;	4. Прямая b пересекает плоскость α или принадлежит ей.
5. $(\alpha \times b) \wedge (b \parallel a) \to (\alpha \times a)$;	5. Но если плоскость α пересекает прямую b, то пересекает и параллельную ей прямую a (Т.11), что противоречит условию.
6. $\overline{b \parallel \alpha} \wedge \overline{b \times \alpha} \to (b \subset \alpha)$.	6. Так как прямая b непараллельна α и не пересекает ее, то она принадлежит ей.

Мы доказали, что

$$(a, \alpha)[(a \parallel \alpha) \to (\exists b)(b \subset \alpha) \wedge (b \parallel a)].$$

05.2.1. Целесообразно решить некоторые задачи на доказательство, требующие применения признака параллельности прямой и плоскости, как например:

1) Если прямая параллельна плоскости, то этой же плоскости параллельна и всякая другая прямая, параллельная данной прямой и не принадлежащая этой плоскости.

2) Существует одна и только одна плоскость, проходящая через одну из скрещивающихся прямых и параллельная другой.

(Задачу 2 целесообразно иллюстрировать не только на чертеже, но и на модели, ибо изображение скрещивающихся прямых не обладает достаточной наглядностью.)

05.3. Существование параллельных плоскостей доказывается следующей теоремой.

Т.14. Существует единственная плоскость, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку, не принадлежащую данной плоскости.

Эта теорема представляет собой конъюнкцию двух высказываний; одно выражает существование плоскости с указанными свойствами, другое — единственность этой плоскости:

$$(\alpha, Q)[\overline{(Q \in \alpha} \to (\exists \beta)((\beta \parallel \alpha) \wedge (Q \in \beta)) \wedge (\beta')((\beta' \parallel \alpha) \wedge (Q \in \beta') \to \\ \to (\beta' \equiv \beta))].$$

а) Доказательство существования

1. $P \in \alpha$;

1. Берем произвольную точку P на плоскости α.

2. $(m, n \subset \alpha) \wedge (P \in m, n)$;

2. Проводим через нее в этой плоскости две произвольные прямые m и n (рис. 27).

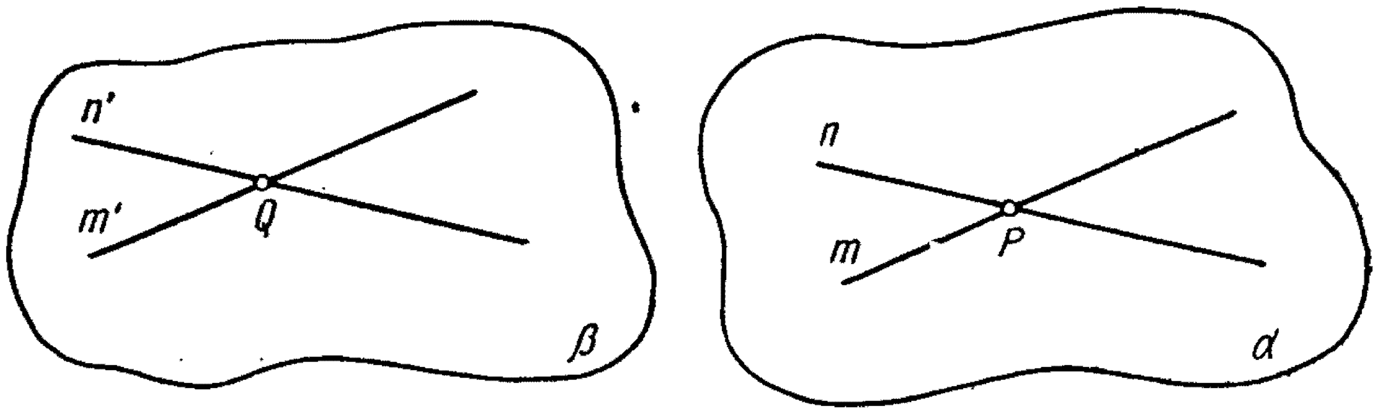


Рис. 27.

3. $(m' \parallel m) \wedge (n' \parallel n) \wedge \wedge (Q \in m'n')$;

3. Проводим через точку Q прямые m' и n', соответственно параллельные m и n.

4. $(m' \times n') \to (\exists \beta)(m', n' \subset \beta)$;

4. Существует плоскость β, проходящая через пересекающиеся прямые m' и n' (Т. 4). Докажем, что $\beta \parallel \alpha$.

5. $(\alpha \times \beta) \to (\exists l)(l \subset \alpha, \beta)$;

5. Если эти плоскости пересекаются, то они имеют общую прямую l (опр. 7).

6. $\overline{m \subset \beta} \wedge (m \parallel m') \wedge \wedge (m' \subset \beta) \to (m \parallel \beta)$; $\overline{n \subset \beta} \wedge (n \parallel n') \wedge \wedge (n' \subset \beta) \to (n \parallel \beta)$.

6. Так как прямые m и n соответственно параллельны прямым m' и n' плоскости β, то они параллельны этой плоскости (Т. 13).

7. $(m \parallel \beta) \wedge (l \subset \beta) \to \overline{m \times l}$; $(n \parallel \beta) \wedge (l \subset \beta) \to \overline{n \times l}$.

7. Так как прямые m и n параллельны плоскости β, а прямая l лежит в этой плоскости, то m и n не пересекаются с прямой l (опр. 6, опр. 1).

8. $(m, l \subset \alpha) \wedge \overline{m \times l} \wedge \wedge \overline{m \equiv l} \to (m \parallel l)$; $(n, l \subset \alpha) \wedge \wedge \overline{n \times l} \wedge \overline{n \equiv l} \to (n \parallel l)$.

8. Так как прямые m и n не пересекают прямую l, лежат с ней в одной плоскости α и не совпадают с ней, то они параллельны ей.

Мы получили, что в плоскости α две прямые m и n проходят через точку P и обе параллельны прямой l, что противоречит аксиоме параллельных. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Так как

$(X\dot{\vee}Y)\wedge\bar{X}\to Y$ тождественно-истинная формула, то имеет место правило вывода $\dfrac{X\dot{\vee}Y,\bar{X}}{Y}$, которое мы здесь и применили:

$$\frac{(\alpha\times\beta)\ \dot{\vee}\ (\alpha\parallel\beta),\ \overline{\alpha\times\beta}}{\alpha\parallel\beta}.$$

б) Доказательство единственности

1. $(\exists\beta')(Q\in\beta')\wedge(\beta'\parallel\alpha)$.

1. Пусть через Q проходит еще одна плоскость β', параллельная плоскости α.

2. $(\beta'\parallel\alpha)\wedge(m\subset\alpha)\to(m\parallel\beta')$;
$(\beta'\parallel\alpha)\wedge(n\subset\alpha)\to(n\parallel\beta')$.

2. Тогда прямые m и n будут параллельны плоскости β' (опр. 1, опр. 8).

3. $(Q\in m',\ \beta')\to(m'\times\beta')\ \dot{\vee}\ (m'\subset\beta')$;
$(Q\in n',\ \beta')\to(n'\times\beta')\ \dot{\vee}\ (n'\subset\beta')$.

3. Так как прямые m' и n' проходят через точку Q плоскости β', они могут пересекать эту плоскость или лежать в ней (только одно из двух).

4. $(\beta'\times m')\wedge(m'\parallel m)\to(\beta'\times m)$;
$(\beta'\times n')\wedge(n'\parallel n)\to(\beta'\times n)$.

4. Но если плоскость β' пересечет прямые m' и n', то она пересечет и параллельные им прямые m и n (Т.11).

5. $\overline{\beta'\times m}\wedge(m'\parallel m)\to\overline{\beta'\times m'}$;
$\overline{\beta'\times n}\wedge(n'\parallel n)\to\overline{\beta'\times n'}$.

6. $\overline{\beta'\times m'}\to(m'\subset\beta')$;
$\overline{\beta'\times n'}\to(n'\subset\beta')$.

5—6. Следовательно, по указанному выше правилу вывода, прямые m' и n' лежат в плоскости β'.

7. $(m'\times n')\wedge(m',n'\subset\beta)\wedge(m',n'\subset\beta')\to(\beta'\equiv\beta)$.

7. Но через две пересекающиеся прямые m' и n' проходит единственная плоскость (Т.4).

Следовательно, $\beta'\equiv\beta$.

Из доказанной выше теоремы (Т.14) непосредственно выводятся важные следствия.

Следствие 1. (Признак параллельности двух плоскостей.) Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы две пересекающиеся прямые одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым другой плоскости.

Достаточность этого признака непосредственно следует из доказательства Т.14, так как в нем мы построили две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельные двум прямым другой плоскости, и доказали, что эти плоскости параллельны.

Необходимость этого признака очевидна. Действительно, если плоскости α и β параллельны, то всякая прямая одной из них параллельна другой. Поэтому если взять две пересекающиеся прямые m и n плоскости α, то $(m \parallel \beta) \wedge (n \parallel \beta)$. По Т.13 (используя необходимость признака параллельности прямой и плоскости) получаем:

$$(\exists(m', n'))[(m', n' \subset \beta) \wedge (m \parallel m') \wedge (n \parallel n')].$$

05.3.1. В связи с признаком параллельности двух плоскостей возникают такие вопросы:

1) Не достаточно ли, чтобы одна прямая одной плоскости была параллельна прямой другой плоскости, чтобы эти плоскости были параллельны?

2) Существенно ли условие пересечения двух прямых?

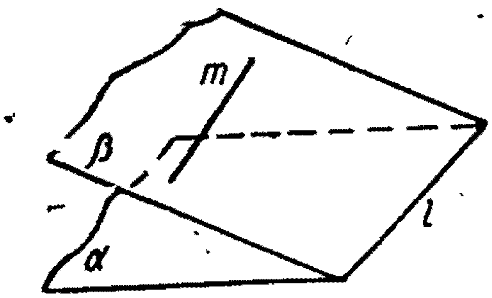


Рис. 28.

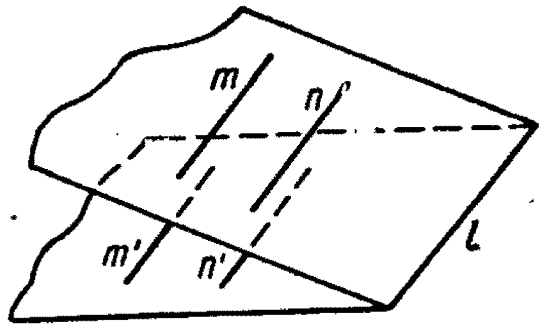


Рис. 29.

Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно взять две пересекающиеся плоскости α и β (рис. 28) и в одной из них, например β, провести прямую m, параллельную линии пересечения l. Мы получили:

$$(m \subset \beta) \wedge (m \parallel l) \wedge (l \subset \alpha) \wedge \overline{\alpha \parallel \beta},$$

что эквивалентно:

$$\overline{(m \subset \beta) \wedge (m \parallel l) \wedge (l \subset \alpha) \to (\alpha \parallel \beta)}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно опустить условие пересечения двух прямых, т. е. потребовать лишь, чтобы две прямые (m, n) одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым (m', n') другой плоскости. В этом случае, если $m \parallel n$, то плоскости α и β не обязательно параллельны. Действительно, взяв две пересекающиеся плоскости α и β (рис. 29) и проведя в плоскости β прямые m и n параллельно линии пересечения l, а в плоскости α — прямые m' и n' также параллельно l, получаем:

$$(m, n \subset \beta) \wedge (m', n' \subset \alpha) \wedge (m \parallel m') \wedge (n \parallel n') \wedge \overline{\alpha \parallel \beta}.$$

Таким образом выясняем, что нельзя ослабить требование, содержащееся в признаке параллельности плоскостей. Это разъяснение целесообразно иллюстрировать на модели.

Следствие 2. Для любых трех различных плоскостей α, β, γ имеет место

$$(\alpha \parallel \beta) \wedge (\beta \parallel \gamma) \to (\alpha \parallel \gamma)$$

(свойство транзитивности).

Действительно, пусть $\overline{\alpha \parallel \gamma}$. Тогда $(\exists C)(C \in \alpha, \gamma)$ и мы получили, что через точку C проходят две различные плоскости (α и γ), параллельные плоскости β, что противоречит Т.14 в той части, где она утверждает единственность такой плоскости.

Следствие 3. Если две плоскости параллельны, то всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую:

$$(\alpha, \beta)[(\alpha \parallel \beta) \to (\gamma)((\gamma \times \alpha) \to (\gamma \times \beta))].$$

Действительно, если $\gamma \times \alpha$, то $\overline{\gamma \parallel \beta}$, ибо по свойству транзитивности (следствие 2)

$$(\gamma \parallel \beta) \wedge (\beta \parallel \alpha) \to (\gamma \parallel \alpha).$$

05.3.2. Нетрудно показать, что имеет место и обратное предложение:

$$(\alpha, \beta)[(\gamma)((\gamma \times \alpha) \to (\gamma \times \beta)) \to (\alpha \parallel \beta)].$$

Докажем это предложение способом «от противного», т. е. заменим его по принципу контрапозиции эквивалентным предложением:

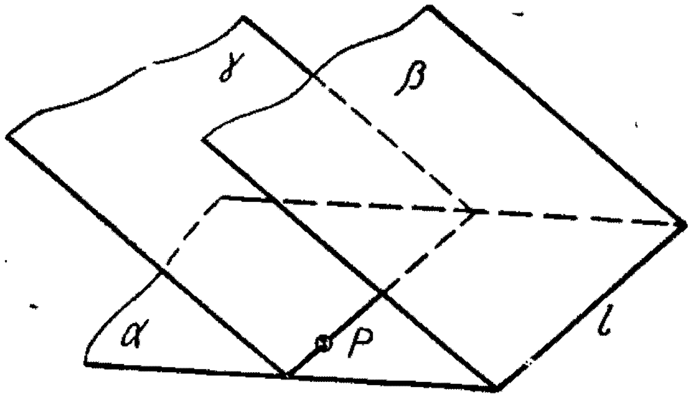


Рис. 30.

$$\overline{\alpha \parallel \beta} \to (\overline{\gamma})[(\gamma \times \alpha) \to (\gamma \times \beta)] \text{ или}$$

$$(\alpha \times \beta) \to (\exists\gamma)[(\gamma \times \alpha) \wedge \overline{\gamma \times \beta}].$$

Берем две пересекающиеся плоскости α и β (рис. 30). На одной из них, например α, берем произвольную точку P и через нее проводим плоскость γ, параллельную плоскости β.

Мы получаем:

$$(\alpha \times \beta) \to (\exists\gamma)[(\gamma \times \alpha) \wedge \overline{\gamma \times \beta}].$$

Таким образом, имеет место признак параллельности плоскостей, аналогичный признаку параллельности прямых (Т. 11, Т. 12): «Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую».

Этот признак необходим вследствие истинности предложения:

$$(\alpha \parallel \beta) \to (\gamma)[(\gamma \times \alpha) \to (\gamma \times \beta)]$$

и достаточен вследствие истинности обратного предложения:

$$(\gamma)[(\gamma \times \alpha) \to (\gamma \times \beta)] \to (\alpha \parallel \beta).$$

Можно предложить учащимся самостоятельно доказать еще один признак параллельности плоскостей:

$$(\alpha \parallel \beta) \longleftrightarrow (a)[(a \times \alpha) \to (a \times \beta)].$$

06. В связи с изучением взаимного расположения двух плоскостей целесообразно рассмотреть и взаимное расположение трех плоскостей. Все случаи взаимного расположения трех плоскостей могут быть получены в результате обоснованного исследования и иллюстрированы на моделях и чертежах.

Ниже приводится это исследование.

Пусть имеем три различные плоскости α, β, γ.

Различаем два случая:

А. Какие-нибудь две из трех плоскостей параллельны.

В. Никакие две плоскости не параллельны, т. е. данные плоскости попарно пересекаются.

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

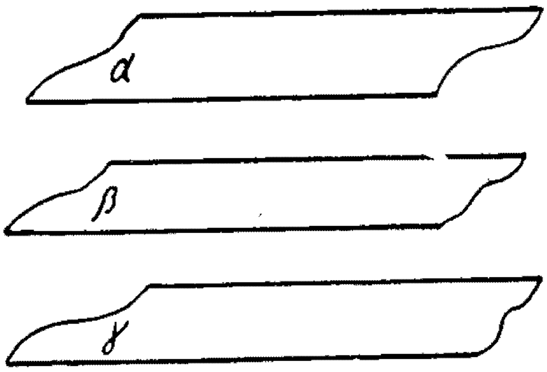


Рис. 31.

А. Пусть $\alpha \parallel \beta$. Тогда представляются следующие возможности:

1) $\gamma \parallel \beta$ и так как $\beta \parallel \alpha$, то $\gamma \parallel \alpha$ (по свойству транзитивности). В этом случае получаем три параллельные плоскости (рис. 31).

2) $\gamma \times \beta$, тогда $(\gamma \times \beta) \wedge (\beta \parallel \alpha) \to (\gamma \times \alpha)$ (по следствию 3 из Т.14) и $(\exists a)(a \subset \beta, \gamma)$, $(\exists b)(b \subset \alpha, \gamma)$.

Нетрудно доказать, что $a \parallel b$. Действительно,

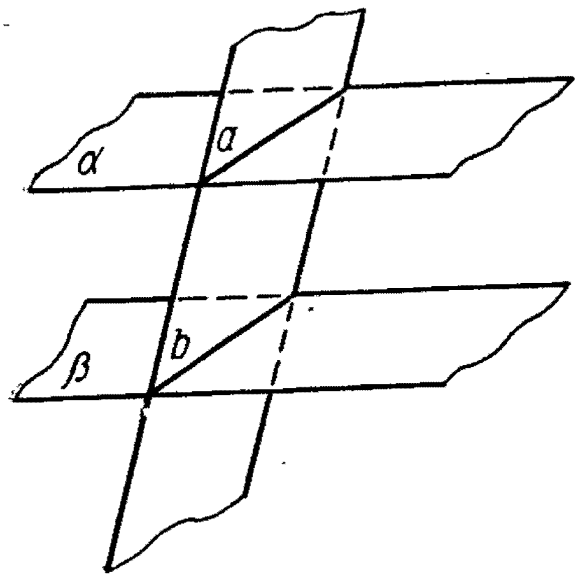


Рис. 32.

$$(a, b \subset \gamma) \to (a \times b) \dot{\vee} (a \parallel b); \quad (1)$$

$$(a \times b) \to (\exists\, C)(C \in a, b); \quad (2)$$

$$(C \in a) \wedge (a \subset \beta) \to (C \in \beta); \quad (3)$$

$$(C \in b) \wedge (b \subset \alpha) \to (C \in \alpha); \quad (4)$$

$$(C \in \alpha) \wedge (C \in \beta) \to \overline{\alpha \parallel \beta}, \quad (5)$$

что противоречит условию $\alpha \parallel \beta$. Следовательно, $\overline{a \times b}$ и поэтому $a \parallel b$. В этом случае получаем две параллельные плоскости (α и β), пересекаемые третьей по параллельным прямым (рис. 32).

Б. Пусть никакие две из трех плоскостей α, β, γ не параллельны, т. е. $\alpha \times \beta$, $\beta \times \gamma$, $\gamma \times \alpha$.

Тогда либо какие-нибудь две из трех линий пересечения совпадают, либо никакие две не совпадают.

1) Пусть $(a \subset \alpha, \beta) \wedge (a \subset \beta, \gamma)$, отсюда следует, что $(a \subset \alpha, \gamma)$, т. е. все три плоскости имеют общую прямую (рис. 33).

2) Пусть $a \subset \beta, \gamma$ и $b \subset \gamma, \alpha$ и $c \subset \alpha, \beta$, причем a, b, c — различные прямые. Рассмотрим какие-нибудь две из них, например, a и b:

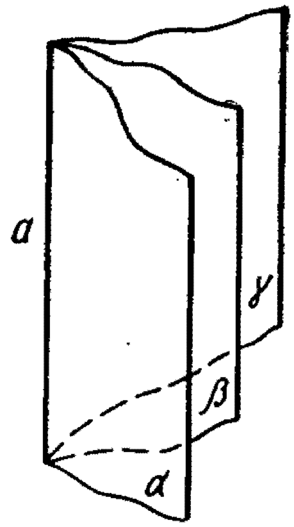


Рис. 33.

$$(a, b \subset \gamma) \rightarrow (a \times b) \dot{\vee} (a \parallel b).$$

а) Пусть $a \times b$.

$$(a \times b) \rightarrow (\exists A (A \in a, b); \quad (1)$$

$$(A \in a) \wedge (a \subset \beta) \rightarrow (A \in \beta); \quad (2)$$

$$(A \in b) \wedge (b \subset \alpha) \rightarrow (A \in \alpha); \quad (3)$$

$$(A \in \alpha, \beta) \wedge (c \subset \alpha, \beta) \rightarrow (A \in c). \quad (4)$$

В этом случае все три плоскости имеют одну и только одну общую точку: $(A \in \alpha, \beta, \gamma)$ (рис. 34).

б) Пусть $a \parallel b$.

В этом случае имеем и $b \parallel c$. Действительно,

$$(b, c \subset \alpha) \rightarrow [(b \times c) \dot{\vee} (b \parallel c)],$$

но если $b \times c$, то по предыдущему (а) имеет место и $a \times b$, что противоречит условию.

Таким образом, в этом случае три плоскости, попарно пересекаясь по параллельным прямым, не имеют общей точки (рис. 35).

06.1. К аналогичному исследованию приводит нас доказательство теоремы Дезарга в пространстве. Эта теорема может быть предложена учащимся в следующей формулировке.

Пусть даны две различные плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ (это значит, в частности, что точки A, B, C, так же как точки A_1, B_1, C_1, не лежат на одной прямой).

Доказать: если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку или параллельны, то пары прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, или же параллельны, и обратно.

07. На этом мы завершаем наше изложение.

Очевидно, целесообразно разъяснить учащимся, что принятые нами аксиомы (I.1—6, II.1—5 и аксиома параллельности) еще недостаточны для обоснования всей геометрии. В частности, на базе только этих аксиом мы не можем строго обосновать теорию равенства геометрических фигур, теорию подобия, теорию измерения геометрических величин (длины, площади, объема).

Для строгого обоснования этих теорий необходимы новые аксиомы, которые вместе с принятыми нами составляют си-

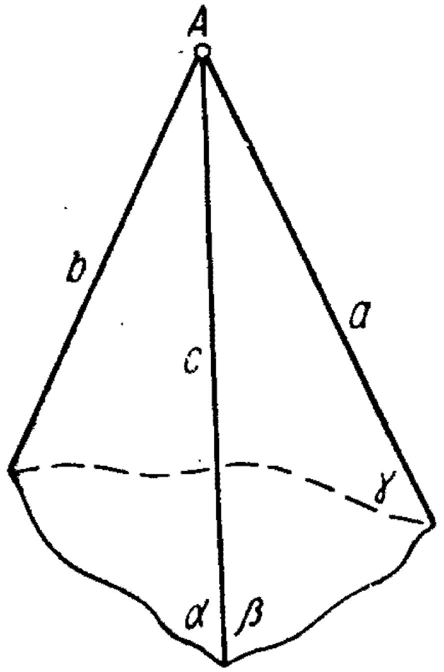


Рис. 34.

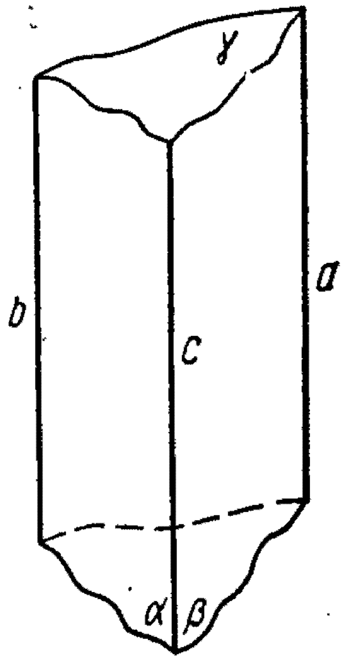


Рис. 35.

стему аксиом, представляющую собой геометрическую базу, на которой развертывается вся евклидова геометрия с помощью средств вывода, взятых из определенной логической системы, образующей логический язык геометрии.

Учащимся необходимо сообщить, что не следует заниматься реконструкцией всей уже изученной части геометрии (планиметрии) на аксиоматической основе и что будем пользоваться в стереометрии всеми имеющимися у нас сведениями из планиметрии.

Глава 4. Конкретные модели и абстрактная теория

01. Мы уже говорили о двух сторонах аксиоматического метода построения теории: *а*) логической организации теории с использованием определенного логического языка и *б*) абстрагировании теории от конкретной природы рассматриваемых объектов и конкретного смысла отношений между ними (гл. 1).

Мы также показали (ч. I, гл. 5 и ч. II, гл. 3), как в школьном обучении может быть разъяснена первая сторона. В настоящей главе рассматривается вопрос о возможности ознакомления учащихся со второй стороной современного аксиоматического метода на примере перехода от конкретных моделей к абстрактной теории и от нее к другим конкретным моделям.

Естественно возникает вопрос: достижима ли вообще в школьном обучении такая ступень абстракции, которая свойственна современной аксиоматизированной теории? В таком общем виде вряд ли можно ответить на этот вопрос. Все зависит от предшествующей подготовки учащихся, от выбора теории, на примере которой мы реализуем переход от конкретной модели (или конкретных моделей) к абстрактной теории и от нее к другим конкретным моделям, а также от методики осуществления этого перехода.

Следует отметить, что речь идет лишь об ознакомлении учащихся с уровнем абстракции современной математической теории, а не о достижении этого уровня в школьном преподавании математики. Это ознакомление даст возможность раскрыть значение многозначности современных математических теорий, о которой мы уже говорили (гл. 1).

Прежде всего выясним, в каком аспекте могут быть разъяснены учащимся старших классов важные понятия изоморфизма и модели, без которых нельзя понять сущность современного аксиоматического метода.

02. В традиционной логике аналогия рассматривается как вид умозаключения, в котором от сходства предметов в одних признаках заключают о сходстве этих предметов в других, причем это заключение является лишь вероятным, а не достоверным. Поэтому аналогия не может служить методом доказательства, она может применяться лишь для обнаруживания новых истин, которые подлежат доказательству уже другими средствами.

В основном к этому сведена роль аналогии в традиционной практике преподавания математики, причем ее применение весьма ограничено. В этом также выражается разрыв между установившейся практикой преподавания и современной математикой, пронизанной духом аналогий.

Аналогии служат базой процесса обобщения и абстрагирования, осуществляемого в связи с аксиоматизацией теории. Заключения по аналогии, относящиеся к изоморфным множествам, при некоторых условиях достоверны.

Нам представляется, что понятие изоморфизма должно и может быть разъяснено учащимся старших классов на некоторых важных примерах.

В качестве первого такого примера рассмотрим изоморфизм множеств вещественных чисел и точек прямой.

Пусть D — множество вещественных чисел, $a, b, c, \ldots$ $x, y \ldots$ — вещественные числа, т. е. $a, в, c, \ldots, x, y, \ldots, \in D$, и «$<$» — знак отношения «меньше», установленного в этом множестве.

Пусть T — множество точек прямой, A, B, C, ... — точки прямой, $A, B, C, ... \in T$ и «$\prec$» — знак отношения «предшествует», установленного в этом множестве.

Эти множества с введенными в них отношениями $[D, <]$ $[T, \prec]$ обнаруживают глубокое сходство, хотя внешне они различны: элементы одного множества — числа, другого — точки, отношения имеют различный конкретный смысл. Это сходство выражается в возможности установления такого взаимно-однозначного соответствия между элементами этих двух множеств, которое сохраняет отношение порядка.

Дальше мы разъясним, что надо понимать под выражением «соответствие сохраняет отношение порядка».

Установим соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек прямой следующим образом. Возьмем на прямой произвольную точку O. Эта точка определяет на прямой две полупрямые, одну из которых назовем положительной, другую — отрицательной.

Произвольной точке прямой M поставим в соответствие вещественное число x так, что $|x|$ равно длине отрезка OM, при выбранной единице длины, $x>0$, если M принадлежит положительной полупрямой, и $x<0$, если M принадлежит отрицательной полупрямой.

Если $M \equiv O$, то принимается $x=0$.

Обоснование существования и взаимной однозначности такого соответствия требует применения, кроме обычно рассматриваемой в школьной геометрии аксиомы Архимеда, еще и аксиомы Кантора. Разъяснение учащимся старших классов сущности этой аксиомы не вызывает особых затруднений. Это можно сделать именно в связи с установлением того, что всякому вещественному числу при выборе точки O (начала), направления и единицы длины соответствует определенная (единственная) точка прямой.

Случай, когда данное число рациональное, не требует применения аксиомы Кантора и решается просто с помощью элементарного построения. Случай, когда данное число иррациональное, может быть рассмотрен в следующем аспекте.

Пусть, например, вещественное число x выражается следующей бесконечной, десятичной, непериодической дробью $x=2{,}34152...$

Если существует точка M, соответствующая этому числу, то длина отрезка OM должна равняться x.

Мы можем найти (по первому случаю, который мы здесь не рассмотрели) точки A_1 и B_1, соответствующие рациональным числам 2, 3 и 2, 4, т. е. приближенным значениям x с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком соответственно.

Если точка M существует, то $OA_1<OM<OB_1$, т. е. точка M лежит внутри отрезка A_1B_1.

Мы можем также найти точки A_2 и B_2, соответствующие числам 2,34 и 2,35, т. е. приближенным значениям x с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком.

Если точка M существует, то $OA_2<OM<OB_2$, т. е. точка M лежит внутри отрезка A_2B_2.

Неограниченно продолжая этот процесс, мы получаем, что если точка M существует, то она лежит внутри каждого из отрезков бесконечной последовательности: A_1B_1, A_2B_2... A_nB_n ..., обладающей следующими свойствами: 1) каждый отрезок, кроме первого, лежит внутри предыдущего и 2) длины отрезков стремятся к нулю (или же нет отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой последовательности).

Существование точки, лежащей внутри всех отрезков этой последовательности, постулируется аксиомой Кантора.

Аксиома Кантора. Если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2 ... A_nB_n, ...такая, что: 1) каждый отрезок лежит внутри предыдущего и 2) длины отрезков стремятся к нулю (или нет отрезка, лежащего внутри всех отрезков последовательности), то существует точка, лежащая внутри всех отрезков этой последовательности.

Единственность этой точки непосредственно следует из аксиомы. Действительно, если существовали бы две такие точки, то определяемый отрезок лежал бы внутри всех отрезков этой последовательности, что противоречит второму условию, исключающему существование такого отрезка.

Доказательство того, что каждой точке прямой соответствует определенное вещественное число, на школьном уровне не вызывает затруднений, и мы его здесь не рассматриваем.

Таким образом, устанавливается, что определенное нами соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек прямой взаимно-однозначно. Но это соответствие обладает еще одним важным свойством.

Выбрав на прямой такое направление, при котором любая точка отрицательной полупрямой предшествовала бы любой точке положительной полупрямой, получаем, что если $M_1 \prec M_2$ — истинное высказывание и x_1 соответствует M_1, а x_2 соответствует M_2, то и $x_1<x_2$ — истинное высказывание; если же $M_1 \prec M_2$ — ложное высказывание, то и $x_1<x_2$ также ложное высказывание, т. е. имеет место эквивалентность:

$$(M_1 \prec M_2) \leftrightarrow (x_1 < x_2).$$

Такое соответствие называется **изоморфизмом, сохраняющим отношение порядка**, а множества D и T с введенными в них соответствующими отношениями порядка — **изоморфными**.

Отвлекаясь от природы объектов множеств и конкретного смысла отношений, приходим к следующему определению. Множество M с отношением (или предикатом) $R(x, y)$ изоморфно множеству M' с предикатом $R(x', y')$, если между элементами M и M' можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что для любых x, y из M предикат $R(x, y)$ имеет то же значение истинности (И или Л), что и $R(x', y')$, т. е. $R(x, y) \longleftrightarrow R(x', y')$, если x' соответствует x и y' соответствует y.

Это соответствие называется изоморфизмом, сохраняющим отношение R.

Мы рассмотрели случай изоморфизма множеств с одним предикатом. Это определение естественным образом распространяется на более общий случай множеств с несколькими отношениями (или предикатами).

В таком более общем случае изоморфизм ставит в соответствие каждому отношению одного множества определенное отношение другого множества и переводит элементы одного множества, находящиеся в каком-нибудь отношении, в соответствующие элементы другого множества, находящиеся в соответствующем отношении.

03. Если множество вместе с установленными в нем предикатами удовлетворяет некоторой системе аксиом, то мы говорим, что это множество со своими предикатами является моделью системы аксиом или теории, построенной на этой системе аксиом.

Имеет место важное положение. Если два множества с некоторыми предикатами изоморфны и если одно из них вместе со своими предикатами удовлетворяет некоторой системе аксиом, т. е. является моделью теории, построенной на этой системе, то и другое множество с соответствующими предикатами удовлетворяет той же системе аксиом, т. е. является моделью той же теории.

Проиллюстрируем это положение на рассмотренном выше примере изоморфизма (02) множеств с одним предикатом порядка

$$[D, <] \text{ и } [T, \prec].$$

Нам известно (гл. 3,04), что $[T, \prec]$ (множество точек прямой с установленным в нем отношением «предшествует») удовлетворяет аксиомам порядка II.1—4. Рассмотрим II.1—4 как отдельную систему аксиом.

Из установленного изоморфизма следует, что и $[D, <]$ (множество вещественных чисел с установленным в нем отношением «меньше») удовлетворяет этой же системе аксиом, сформулированных, разумеется, в терминах теории, описывающей структуру $[D, <]$.

Прежде всего для перевода аксиом с одного языка, а именно с языка теории, описывающей структуру $[T, \prec]$, на другой язык, язык теории, описывающей структуру $[D, <]$, мы пользуемся установленным изоморфизмом этих множеств, который с этой целью удобно выразить с помощью словаря, играющего здесь роль табличного задания соответствия.

В данном случае словарь очень прост, он задает перевод всего лишь двух терминов:

Язык $[T, \prec]$	**Язык** $[D, <]$
Точки $A, B, C, \ldots$ прямой	Вещественные числа $a, b, c, \ldots$
Предшествует („$\prec$“)	Меньше („$<$“)

Переводя с помощью этого словаря аксиомы II.1—4 на язык $[D, <]$, получаем:

II.1. Для любых двух различных вещественных чисел a, b, либо $a<b$, либо $b<a$ и только одно из двух.

$$(a, b)[\overline{a \equiv b} \to ((a < b) \dot{\vee} (b < a))].$$

II.2. Для любых трех вещественных чисел a, b, c, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности).

$$(a, b, c)[(a < b) \wedge (b < c) \to (a < c)].$$

II.3. Для любых двух различных вещественных чисел a, b существует вещественное число c такое, что $a<c<b$ или $b<c<a$:

$$(a, b)[\overline{a \equiv b} \to (\exists c)((a < c < b) \vee (b < c < a))].$$

II.4. Нет вещественного числа, меньшего всех остальных (наименьшего вещественного числа), и нет вещественного числа такого, что все остальные меньше его (наибольшего вещественого числа).

$$\overline{(\exists a)}(b)(a < b) \wedge \overline{(\exists c)}(b)(b < c).$$

Мы знаем, что все эти аксиомы действительно удовлетворяются в $[D, <]$. Но нас интересует другое. Оказывается, выполнимость всех этих аксиом в $[D, <]$ следует из их выполнимости в $[T, \prec]$ и из изоморфизма множеств $[T, \prec]$ и $[D, <]$.

Докажем, для примера, выполнимость II.1.

Пусть a, b — два произвольных вещественных числа. В известном изоморфизме числу a соответствует точка A, числу b — точка B.

По II.1 для $[T, \prec]$ имеет место либо $A \prec B$, либо $B \prec A$ и только одно из двух.

Вследствие изоморфизма

$$(A \prec B) \to (a < b)$$

и

$$(B \prec A) \to (b < a).$$

Следовательно,

$(A \prec B) \dot{\vee} (B \prec A) \to (a<b) \dot{\vee} (b<a)$, т. е. имеет место либо $a<b$, либо $b<a$ и только одно из двух.

Мы доказали выполнимость II.1 в $[D, <]$, исходя из изоморфизма между $[D, <]$ и $[T, \prec]$, и выполнимости II.1 в $[T, \prec]$.

Аналогично доказывается и выполнимость II.2 и II.3. (Эти доказательства могут выполняться самостоятельно учащимися.)

Выполнимость II.4 легко устанавливается способом «от противного». Пусть существует наименьшее вещественное число, т. е. такое, что оно меньше всех остальных вещественных чисел. Тогда по установленному изоморфизму этому вещественному числу соответствовала бы точка, обладающая аналогичным свойством, т. е. предшествующая всем остальным точкам прямой, но такой точки нет в множестве T согласно II.4 для $[T, \prec]$.

Аналогично исключается возможность существования наибольшего вещественного числа.

04. На приведенном выше примере мы показали, что если одно множество с предикатом (или предикатами) является моделью системы аксиом, то и изоморфное ему множество с соответствующим предикатом (или предикатами) также является моделью этой же системы аксиом.

Возникает вопрос: если два множества с некоторыми предикатами являются моделями одной и той же системы аксиом, будут ли они изоморфными? Оказывается, не всегда. В частности, $[R, <]$ (множество рациональных чисел с введенным в нем отношением «меньше») также является моделью системы аксиом II.1—4, но это множество с предикатом «меньше» не изоморфно $[D, <]$, между этими множествами нельзя даже установить взаимно-однозначного соответствия.

Случай, когда все модели системы аксиом изоморфны, будет рассмотрен в следующей главе (гл. 5).

05. Мы рассмотрели пример изоморфизма, сохраняющего отношение порядка. Понятие изоморфизма распространяется и на случаи, когда в множествах определены операции.

Если в множестве M введена операция «$\bigcirc$», а в множестве M'— операция «$\square$», то, чтобы соответствие «f» между элементами этих множеств было изоморфизмом и относительно введенной операции, требуется, чтобы оно сопоставляло результаты соответствующих операций над соответствующими элементами, т. е. чтобы для любых двух элементов $x, y,$ из M имело место:

$$f(x \bigcirc y) = f(x) \square f(y).$$

Приведем интересный пример изоморфизма, устанавливаемого с помощью элементарной функции, традиционно изучающейся в школьном курсе. Рассмотрим множество D всех вещественных чисел с отношением порядка «$<$» (меньше) и операцией «$+$» (сложение): $[D, <, +]$ и множество $D+$ положительных вещественных чисел с тем же отношением порядка «$<$» (меньше) и операцией «$\cdot$» (умножение): $[D^+, <, \cdot]$.

Определим соответствие между элементами множеств D и D^+ следующим образом: каждому положительному вещественному числу $x(x \in D^+)$ сопоставим вещественное число $y(y \in D)$ так, чтобы $y = \log_a x$, где a — определенное, фиксированное число больше 1.

Соответствие, определяемое функцией $y = \log_a x$ при $a > 1$, является изоморфизмом, сохраняющим отношение «$<$» и переводящим операцию «$\cdot$» в D^+ в операцию «$+$» в множестве D.

Действительно, данное соответствие:

а) взаимно-однозначно:

$$(x)[(x \in D^+) \to (\exists y)(y \in D) \wedge (y = \log_a x)] \wedge$$

$$\wedge (x_1, x_2)[\overline{x_1 = x_2} \to \overline{\log_a x_1 = \log_a x_2}];$$

б) сохраняет отношение порядка (меньшему числу соответствует меньший логарифм, так как $a > 1$):

$$(x_1, x_2)[(x_1, x_2 \in D^+) \wedge (x_1 < x_2) \to (\log_a x_1 < \log_a x_2)];$$

в) произведению чисел из D^+ сопоставляет сумму их логарифмов (т. е. соответствующих элементов) в D:

$$(x_1, x_2)[(x_1, x_2 \in D^+) \to (\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2)].$$

Таким образом, логарифмическая функция определяет изоморфное отображение множества D^+ на D. Если взять $a < 1$, то указанный изоморфизм переведет отношение «меньше» в отношение «больше» и обратно. Показательная функция определяет изоморфное отображение множества D на D^+.

Этот пример показывает, что традиционное преподавание не использует изучаемые в школе элементарные функции как источник современных идей. Мы ничего здесь не добавили к тому, что традиционно изучается о логарифмической функции. Но выразив свойства этой функции на языке современной математики, мы получили возможность иллюстрировать на этом примере важную идею изоморфизма.

06. Изоморфизм позволяет сделать по аналогии достоверные выводы. Если сходство между отношениями и операциями установлено во всех тех их свойствах, из которых могут быть выведены остальные свойства этих отношений и операций, т. е. сходство установлено между аксиомами теорий, описывающих структуры двух множеств M и M', то заключение по аналогии от сходства между аксиомами к сходству между теоремами этих теорий является достоверным. Эта аналогия и лежит в основе построения одной абстрактной теории, заменяющей конкретные теории, описывающие структуры множеств M и M'.

Покажем это на примере теории коммутативной группы. Рассмотрим две конкретные теории, одна из которых описывает свойства сложения в множестве C целых чисел, а другая — свойства умножения в множестве P рациональных положительных чисел. Таким образом, в множестве целых чисел будем пользоваться только сложением, хотя нам известно, что в этом множестве выполняется и умножение, а в множестве положительных рациональных чисел будем пользоваться только умножением, хотя мы знаем, что в этом множестве выполнимо и сложение.

Перечислим ряд известных нам свойств структур $[C, +]$ и $[P, \cdot]$ (предложений двух теорий, описывающих эти структуры) и ввиду того, что наша цель — выявить сходство в свойствах этих структур, выпишем их в две колонки.

Свойства [C, +]

Обозначим через a, b, c, ... целые числа.

[1] В множестве C определена операция сложения. Это надо понимать так: для каждой пары (a, b) целых чисел существует, притом единственное, целое число c, такое, что $a + b = c$.[1]

[2] Для любых трех целых чисел a, b, c имеет место $a + (b + c) = (a + b) + c$ (сложение ассоциативно).

[3] Для любых двух целых чисел a, b имеет место $a + b = b + a$ (сложение коммутативно).

Свойства [P, ·]

Обозначим через x, y, z, ... положительные рациональные числа.

[1′] В множестве P определена операция умножения. Это надо понимать так: для каждой пары положительных рациональных чисел (x, y) существует, притом единственное, положительное число z, такое, что $x \cdot y = z$.

[2′] Для любых трех положительных рациональных чисел x, y, z имеет место $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (умножение ассоциативно).

[3′] Для любых двух положительных рациональных чисел x, y имеет место $x \cdot y = y \cdot x$ (умножение коммутативно).

---

[1] Здесь и в дальнейшем знак «=» обозначает предикат «равенства», понимаемый в смысле совпадения и обладающий свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

[4] Существует целое число, обозначаемое символом 0, такое, что для любого целого числа a имеет место $0 + a = a$ (0 — нейтральный элемент множества C относительно сложения).

[5] Для каждого целого числа a существует ему противоположное целое число $(-a)$, такое, что $a + (-a) = 0$.

[4′] Существует положительное рациональное число, обозначаемое символом «1», такое, что для любого положительного рационального числа x имеет место $1 \cdot x = x$ (1 — нейтральный элемент множества P относительно умножения).

[5′] Для любого положительного рационального числа x существует обратное положительное рациональное число $\left(\frac{1}{x}\right)$, такое, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Все остальные аналогичные свойства двух структур могут быть логически выведены из перечисленных, т. е. если свойства [1]—[5] (соответственно [1′] — [5′]) принять за аксиомы, то остальные свойства будут уже выражаться теоремами этих двух теорий.

Но имеет ли смысл приступить к доказательству этих теорем для каждой теории? Так как в основе этих теорий положены одни и те же аксиомы («одни и те же» — с точностью до названий элементов множеств и операций), из этих аксиом выводимы одни и те же теоремы (в том же смысле «одни и те же»), иначе говоря, операция сложения в множестве целых чисел и операция умножения в множестве положительных рациональных чисел определяют одну и ту же структуру, называемую **коммутативной группой**.

Очевидно, нет смысла доказывать одни и те же теоремы дважды, применительно к каждой из двух конкретных коммутативных групп. Поэтому, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств и конкретного смысла операций, строят одну абстрактную теорию коммутативной группы.

Это делается примерно так. Рассматривают множество G объектов произвольной, неопределенной природы. Элементы этого множества обозначаются $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ Эти буквы применяются как переменные для элементов множества G, за исключением одной буквы, например «e», обозначающей специальный (постоянный) элемент этого множества, характеристика которого дается в одной из аксиом. В множестве G вводится операция, которую обозначим каким-нибудь знаком, например «$*$», и назовем операцией «звездочка».

Таким образом, первоначальными, принятыми без определения понятиями теории, которую собираются аксиоматизировать, являются множество G и операция $*$.

Ставится следующая задача: сформулировать аксиомы абстрактной теории, описывающей свойства структуры $[G, *]$ так, чтобы две рассмотренные выше конкретные теории, описывающие свойства структур $[C, +]$ и $[P, \cdot]$, были двумя различными моделями или реализациями этой абстрактной теории.

На языке логики предикатов с равенством эти аксиомы запишутся следующим образом:

$$A1.\ (x, y)(\exists z)[x * y = z] \wedge (u)[(x * y = u) \to (u = z)];$$

$$A2.\ (x, y, z)[x * (y * z) = (x * y) * z];$$

$$A3.\ (x, y)[x * y = y * x];$$

$$A4.\ (x)[e * x = x];$$

$$A5.\ (x)(\exists x')[x * x' = e].$$

Аксиоматика A1—A5 служит базой для логического развертывания абстрактной теории коммутативной группы. В доказательствах теорем этой теории можно пользоваться только аксиомами A1—A5 и правилами логического вывода, разработанными в логике предикатов (среди них имеются и все правила вывода, выражаемые на языке логики высказываний).

Ниже приводятся доказательства первых нескольких теорем этой теории.

Т.1. $(x)[x * e = x]$.

Доказательство: Применим к A3 правило подстановки $\frac{(x)P(x)}{P(a)}$ и подставим элемент e вместо переменного элемента y. Символом S^e_y (A3) обозначим «результат подстановки в A3 элемента e вместо y». Получаем:

$$S^e_y(A3):(x)[x * e = e * x]. \tag{1}$$

В логике предикатов с равенством имеется и такое правило подстановки: название объекта (постоянного или переменного) может заменяться названием равного ему объекта всюду, где он входит в формулу, или не всюду.

На основании A4, утверждающей равенство элементов $e * x$ и x, подставим в (1) x вместо $e * x$:

$$S^x_{e*x}\ (1):(x)[x * e = x].$$

Т.2. $(x)[x' * x = e]$.

$$S^{x'}_y(A3):(x)[x * x' = x' * x];$$

$$S_{x\,*\,x'}^{x'\,*\,x}(A5):(x)(\exists x')[x' * x = e].$$

$$\textbf{Т.3.}\ (x, y, z)[(x = y) \to (z * x = z * y)].$$

Исходя из рефлексивности равенства, $z * x = z * x$. Заменяя x на y только во втором члене этого равенства на основе $x = y$ (условие теоремы), получаем

$$z * x = z * y,$$

т. е.

$$(x, y, z)[(x = y) \to (z * x = z * y)].$$

Упражнение. Доказать следствие из Т.3:

$$(x, y, z)[(x = y) \to (x * z = y * z)].$$

$$\textbf{Т.4.}\ (x, y, z)[(z * x = z * y) \to (x = y)].$$

Подставим в Т.3 z' вместо z, затем $z * x$ вместо x, а вместо равного ему элемента y (по условию Т.3) подставим $z * y$, учитывая равенство $z * x = z * y$ (условие Т.4).

Согласно А2:

$$S_{x,\,y,\,z}^{z',\,z,\,x}(A2): z' * (z * x) = (z' * z) * x;$$

$$S_{x,\,y,\,z}^{z',\,z,\,y}(A2): z' * (z * y) = (z' * z) * y,$$

$$\text{т. е. } (z' * z) * x = (z' * z) * y,$$

но по Т.2

$$S_x^z(\text{Т. } 2): z' * z = e,$$

получаем $e * x = e * y$ и, учитывая А4, получаем $x = y$.

Таким образом, мы получили:

$$(x, y, z)[(z * x = z * y) \to (x = y)].$$

Упражнение: Доказать следствия из Т.4:

$$(x, y, z)[(x * z = y * z) \to (x = y)]. \qquad (1)$$

$$(x, y, z)[\overline{x = y} \to \overline{z * x = z * y}]. \qquad (2)$$

$$(x, y, z)[\overline{x = y} \to \overline{x * z = y * z}]. \qquad (3)$$

$$\text{Т. 5}\ (x, y)[(x = y) \to (x' = y')].$$

Из Т.2 : $x' * x = e$. (1). S_x^y (Т. 2) : $y' * y = e$. (2)

$$S_e^{y' * y}(1): x' * x = y' * y. \qquad (3)$$

В первом члене равенства (3) заменим x через y на основании посылки $x=y$: $x' * y = y' * y$ (4).
Из первого следствия из Т.4 и (4) по правилу заключения получаем: $x'=y'$.

Т.6. Нейтральный элемент e относительно операции единственный, т. е.

$$(\exists e')(x)(e' * x = x) \rightarrow (e' = e).$$

$$S_x^e(\text{Т. } 2): e' * e = e, \tag{1}$$

$$S_x^{e'}(\text{Т. } 1): e' * e = e'. \tag{2}$$

Подстановкой в первой части (1) вместо $e' * e$ равного ему элемента e' на основании (2) получаем $e'=e$.

$$\text{Т.7. } (x)[(x')' = x].$$

По А5: $x * x' = e$. (1)

$$S_x^{x'}(\text{Т. } 2): (x')' * x' = e. \tag{2}$$

$$S_e^{x * x'}(2): (x')' * x' = x * x'. \tag{3}$$

Из первого следствия Т.4 и (3) (по правилу заключения) получаем $(x')' = x$.

Упражнение. Используя Т.5 и Т.7, доказать теорему 8.

$$\text{Т.8. } (x, y)[(x' = y') \rightarrow (x = y)].$$

Докажем еще одну теорему, выражающую элемент, обратный элементу $x * y$ через элементы, обратные элементам x и y.

$$\text{Т. 9. } (x, y)[(x * y)' = x' * y'].$$

$$S_x^{x * y}(\text{Т. } 2): (x * y)' * (x * y) = e. \tag{1}$$

Запишем теперь цепочку равенств с целью упрощения выражения $(x' * y') * (x * y)$:

$$(x' * y') * (x * y) \overset{A3}{=} (x' * y') * (y * x) \overset{A2}{=} x' * [y' * (y * x)] \overset{A2}{=}$$

$$\overset{A2}{=} x' * [(y' * y) * x] \overset{\text{Т.2}}{=} x' * (e * x) \overset{A4}{=} x' * x \overset{\text{Т.2}}{=} e.$$

Итак, мы получили

$$(x' * y') * (x * y) = e. \tag{2}$$

Подставляя в (1) вместо e равный ему элемент из (2), получаем:

$$(x * y)' * (x * y) = (x' * y') * (x * y). \quad (3)$$

Из первого следствия Т.4 и (3) (по правилу заключения) получаем:

$$(x * y)' = x' * y'.$$

Приведем пример конкретной модели структуры $[G, *]$, отличной от двух рассмотренных нами до построения фрагмента абстрактной теории. Рассмотрим множество V_0 вращений на плоскости с центром в фиксированной точке O. Отдельные вращения с центром в этой точке, т. е. элементы множества V_0, обозначим: $v_1, v_2, ..., v_n, ...$

В множестве V_0 определим операцию «·» (умножение) следующим образом: произведение $v_2 \cdot v_1$ есть результат последовательного осуществления вращений v_1 и v_2, причем сначала v_1, затем v_2.

Рассмотрим структуру $[V_0, \cdot]$, определяемую операцией умножения в множестве V_0. Прежде всего ясно, что V_0 замкнуто относительно операции «·», так как последовательное выполнение двух вращений около одного и того же центра O (например, на угол φ_1 и φ_2 соответственно) может быть заменено одним вращением около того же центра (на угол $\varphi_1+\varphi_2$), т. е. для любых двух элементов v_1 и v_2 из V_0 существует элемент v_3 из V_0 такой, что $v_2 \cdot v_1 = v_3$ и выполняется А1.

Целесообразно предложить учащимся выяснить конкретный смысл остальных аксиом, иначе говоря, перевести их с языка абстрактной теории на язык теории, описывающей структуру $[V_0, \cdot]$, пользуясь при этом следующим словарем:

1) множество G элементов неопределенной природы,	1) множество V_0 вращений плоскости с центром O;
2) $a, b, c, ..., x, y, ...$ — элементы множества G;	2) $v_1, v_2, ..., v_n, ...$ — элементы множества V_0, т. е. вращения плоскости с центром O;
3) операция « * »;	3) операция «·»,

а также доказать выполнимость аксиом в $[V_0, \cdot]$.

Так как все аксиомы А1—А5, характеризующие структуру коммутативной группы, выполняются, то $[V_0, \cdot]$ также является моделью коммутативной группы и все теоремы абстрактной теории применимы к этой, как и к любой другой, модели.

Интересным для учащихся упражнением является выяснение конкретного смысла в этой модели нейтрального элемента относительно операции «·», элемента, обратного данному, перевод на язык этой модели первых теорем абстрактной теории.

Выделим теперь из множества V_0 всех вращений плоскости с центром O некоторое конечное подмножество таких вращений и докажем, что оно тоже обладает структурой коммутативной группы (является подгруппой группы $[V_0, \cdot]$).

Рассмотрим множество V_0^3, состоящее их трех элементов:

v_1— вращение с центром O на угол $\varphi_1=120^\circ$,

v_2— вращение с центром O на угол $\varphi_2=240^\circ$,

v_3— вращение с центром O на угол $\varphi_3=360^\circ$.

Операцию «·» будем понимать в том же смысле, что и в множестве V_0.

Ввиду того, что число элементов V_0^3 конечно и к тому же небольшое, доказательство выполнимости аксиом легко осуществляется непосредственной проверкой с помощью таблицы операции умножения.

$\cdot$	v_1	v_2	v_3
v_1	v_2	v_3	v_1
v_2	v_3	v_1	v_2
v_3	v_1	v_2	v_3

Составим эту таблицу, исходя из определения операции умножения в множестве V_0.

Из таблицы следует, что:

1) Операция «·» не выводит нас из множества V_0^3, т. е. это множество замкнуто по отношению к этой операции; для каждых двух вращений из V_0^3 существует вращение в этом же множестве V_0^3, являющееся результатом их последовательного осуществления, т. е. их произведением. Следовательно, в $[V_0^3, \cdot]$ выполняется A1.

2) Операция «·» ассоциативна, это уже установлено в множестве V_0. Ассоциативность легко доказать и с помощью таблицы. Например,

$$(v_1 \cdot v_2) \cdot v_3 = v_3 \cdot v_3 = v_3,$$

$$v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3) = v_1 \cdot v_2 = v_3,$$

т. е.

$$v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3) = (v_1 \cdot v_2) \cdot v_3.$$

3) Операция «·» коммутативна в V_0, следовательно, и в V_0^3. Нетрудно это непосредственно проверить. Действительно,

$$v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2;$$

$$v_1 \cdot v_3 = v_3 \cdot v_1;$$

$$v_2 \cdot v_3 = v_3 \cdot v_2,$$

т. е. выполняется A3.

4) В множестве V_0^3 существует нейтральный элемент относительно операции «$\cdot$», а именно v_3. Действительно,

$$v_3 \cdot v_1 = v_1; \quad v_3 \cdot v_2 = v_2; \quad v_3 \cdot v_3 = v_3,$$

т. е. выполняется А4.

5) Для каждого элемента множества V_0^3 существует в этом множестве обратный элемент:

$$v_1 \cdot v_2 = v_3, \quad \text{т. е.} \quad v_2 = v_1' \quad \text{и} \quad v_1 = v_2'$$

$$v_3 \cdot v_3 = v_3, \quad \text{т. е.} \quad v_3 = v_3'.$$

Следовательно, выполняется А5.

Выполнимость аксиом А1—А5 в $[V_0^3, \cdot]$ является доказательством того, что множество V_0^3 с введенной в нем операцией «$\cdot$» (умножения) имеет структуру коммутативной группы.

Множество V_0^3 может быть истолковано и как группа вращений плоскости, оставляющих неизменным (инвариантным) любой равносторонний треугольник с центром O. Действительно, каждое из вращений v_1, v_2, v_3, а следовательно, и их произведения, переводит любой такой треугольник в самого себя, т. е. не меняет его положение.

Здесь уместно обратить внимание учащихся на весьма важное обстоятельство: различие в природе элементов множеств (целые числа, положительные рациональные числа, вращения) и в конкретном смысле операций (сложение, умножение, последовательное осуществление вращений) не обусловливают различия в структурах этих множеств. Несмотря на эти внешние различия, множества, как видно из приведенных примеров, могут иметь одинаковую структуру, описываемую одной абстрактной теорией, моделями которой эти множества с введенными в них операциями и являются.

В качестве полезного упражнения целесообразно предложить учащимся определить группу вращений плоскости, оставляющих инвариантным любой квадрат с центром в данной точке O (или любой правильный шестиугольник с центром в точке O) и потребовать проведения рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в связи с рассмотрением группы $[V_0^3, \cdot]$.

07. Переход от конкретной модели к абстрактной теории и от нее к другим конкретным моделям мы также показали на примере булевой алгебры (ч. I, гл. 7).

Исходя из содержательного истолкования алгебры высказываний, с помощью абстрагирования от конкретной природы объектов этой алгебры (высказываний) и от конкретного смысла логических операций (дизъюнкции, конъюнкции, отрицания) мы показали возможность аксиоматического построения абстрактной булевой алгебры на базе аксиоматики, состоящей из восьми аксиом (I—VIII). Затем с помощью конкретизации мы перешли от абстрактной булевой алгебры к другим ее моделям — алгебре множеств и алгебре релейно-контактных схем.

Здесь имеется еще один яркий пример, когда различие в конкретной природе объектов (высказывания, множества, электрические контакты) и в конкретном смысле операций над этими объектами (дизъюнкция высказываний, объединение множеств, параллельное соединение контактов) не влияет на структуру множеств.

Эта структура определяется не природой объектов и не конкретным смыслом отношений и операций, а формальными свойствами последних, которые оказываются одинаковыми в этих множествах, внешне столь различных.

Этим, в частности, объясняется проникновение современной математики в различные области науки и техники, значительное расширение класса задач, решаемых математическими методами.

08. Мы говорили выше о конкретных «моделях» абстрактной теории. Такое применение термина «модель» необычно для традиционного школьного преподавания, в котором этот термин применяется в одном лишь, весьма узком, смысле моделей геометрических фигур, т. е. для обозначения геометрических тел, изготовленных из дерева, стекла, проволоки, которые мы применяем в стереометрии как наглядные пособия для иллюстрации соответствующих понятий.

Это применение термина «модель» вполне правомерно, так как не противоречит его более общему пониманию. Действительно, куб, пирамида и т. д. представляют собой абстрактные понятия, они определяются через другие, такие же абстрактные понятия. Конкретные тела, изготовленные из определенного материала, окрашенные в определенный цвет, обладающий свойствами, характеризующими эти абстрактные понятия, являются их моделями.

Однако в школьном обучении мы по существу часто занимаемся и «конструированием» моделей другого вида. Речь идет об абстрактных математических, а точнее логико-математических, моделях конкретных задач. В этом случае в отличие от модели теории модель находится на более высокой ступени абстракции, чем задача, которой она соответствует. Задачи различного конкретного содержания могут иметь одну и ту же логико-математическую модель.

Так, например, следующим двум задачам:

1. Две машинистки перепечатали рукопись за a часов. Во сколько времени могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая одна, если первая затратила бы на эту работу на b часов больше второй?

2. Два насоса наполняют бассейн за a часов. Во сколько времени мог бы наполнить бассейн каждый насос, работая один, если первый затратил бы на эту работу на b часов больше?

— соответствует одна и та же логико-математическая модель:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}\right) \wedge (x > b),$$

причем условия обеих задач переводятся на язык этой модели с помощью словаря (состоящего из одной строки): «время (в часах), затрачиваемое первой машинисткой,— x» и «время (в часах) работы одного первого насоса — x».

(Если ограничиваться одним уравнением, как это традиционно делается в школе, получается неполный перевод условия задачи, что приводит к затруднениям в процессе решения, а часто и к ошибкам.)

Разумеется, мы могли бы получить и другую модель, если исходить из другого словаря.

Такой же переход от конкретной, практической задачи к ее абстрактной математической модели имеет место и при решении геометрических задач.

Представляется целесообразным в старших классах средней школы наряду с традиционной терминологией (составление уравнения, определение допустимых значений неизвестного, обозначение неизвестного) применять и следующие термины: составление математической (или логико-математической) модели задачи, составление словаря для перевода условия задачи на язык ее логико-математической модели и т. д.

Хотя рассматриваемый здесь вопрос имеет лишь терминологический аспект, он заслуживает большее внимание, чем это может казаться на первый взгляд. Ведь речь идет здесь не просто о каких-то новых названиях, а о постепенном внедрении в школьное обучение важных идей современной математики. Не надо забывать, что термины при правильном их усвоении не пустые слова, они обозначают понятия, идеи.

Для некоторой подготовки учащихся в этой области вовсе нет надобности включать в школьный курс специальные темы. Традиционный учебный материал содержит достаточно элементов математического моделирования, их надо подчеркивать и разъяснять в процессе обучения.[1]

Глава 5. **Понятие об основных проблемах аксиоматики**

Совершенно очевидно, что нельзя дать учащимся представление об аксиоматическом методе без разъяснения им сущно-

[1] Здесь имеется в виду именно математическое моделирование в современном смысле, а не традиционное геометрическое моделирование.

сти основных проблем аксиоматики. Однако также очевидно, что в школе, даже на последнем году обучения, невозможно сколько-нибудь детальное изучение этих проблем, включая доказательства непротиворечивости, независимости и полноты какой-нибудь аксиоматики.

Поэтому необходимо ограничиться лишь разъяснением того, что означают следующие понятия: аксиоматика непротиворечива, независима, полна, и какими методами доказывается, что данная аксиоматика обладает этими качествами.

Ниже приводится один из возможных вариантов такого разъяснения, прошедший экспериментальную проверку в XI классе средней школы с математической специализацией.[1] В изложении применяют логический аппарат, исходя из предположения, что учащиеся хорошо усвоили его в результате предшествующей подготовки. Но изложение может быть осуществлено и без применения этого аппарата.

01. Мы уже рассмотрели системы аксиом (или аксиоматики), лежащие в основе некоторых теорий: аксиоматику A1 — A5 теории коммутативной группы, аксиоматику I—VIII булевой алгебры, аксиомы принадлежности (I.1—6), порядка (II.1—5) и аксиому параллельности, составляющие часть аксиоматики евклидовой геометрии.

В связи с выбором аксиоматики для дедуктивного построения теории возникают три основные проблемы. При рассмотрении этих проблем будем пользоваться следующими обозначениями: аксиомы выбранной аксиоматики обозначим символами A_1, A_2, A_3, ..., A_n; произвольные предложения, выраженные в терминах теории, построенной на этой аксиоматике, обозначим через X, Y, ...

Уточним понятие выводимости предложения из аксиоматики. Предложение x выводимо из данной аксиоматики A_1, A_2, ... A_n, если истинна импликация

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X. \tag{1}$$

Так как каждая аксиома считается истинной, то истинна и их конъюнкция $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$, и из истинности импликации (1) следует, что и X истинно. Следовательно, если предложение X выводимо, то оно истинно.

Предложение, выраженное в терминах дедуктивной теории, считается истинным, если оно — аксиома или выводимо из аксиом, т. е. теорема.

---

[1] СШ № 444, г. Москва.

Такое формальное толкование истинности предложения в дедуктивной теории не противоречит обычному пониманию истинности как соответствию действительности, так как оно сводит вопрос об истинности одного предложения к вопросу об истинности других предложений — тех, которые приняты за аксиомы. Истинность последних подтверждается практикой.

02. Первая и главная из проблем аксиоматики — проблема непротиворечивости, или совместности.

Аксиоматика называется непротиворечивой, или совместной, если в системе всевозможных следствий из этой аксиоматики (сюда входят, разумеется, и сами аксиомы, так как $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to A_i$) нет ни одной пары высказываний типа X и $\overline{X}$, иначе говоря, аксиоматика непротиворечива, если из нее невыводимо ни одно высказывание вместе с его отрицанием.

Таким образом, определение непротиворечивости некоторой аксиоматики Σ можно записать следующим образом:

$\boxed{\Sigma \text{ — непротиворечива}}$

$$\overline{(\exists X)}[(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \overline{X})].$$

Выясним, почему требование непротиворечивости является важнейшим из требований, предъявляемых к аксиоматике, почему его невыполнение делает аксиоматику непригодной в качестве базы для развертывания теории.

Если требование непротиворечивости не выполняется, т. е. аксиоматика противоречива, то истинно высказывание

$$(\exists X)[(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \overline{X})]$$

или эквивалентное ему высказывание

$$(\exists X)[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X \wedge \overline{X}]$$

(«существует предложение, выраженное в терминах данной теории, которое выводимо из аксиом вместе со своим отрицанием») и так как $(Y)\ [X \wedge \overline{X} \to Y]$ — тождественно-истинная формула, то получаем $(Y)\ [\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to Y]$, т. е. в такой теории (основанной на противоречивой аксиоматике) выводимо любое предложение (истинное или ложное) — в этой «теории» можно доказать что угодно, она не различает внутри себя истину и ложь.

Возникает вопрос: как решается проблема непротиворечивости, т. е. как доказывается, что выбранная аксиоматика непротиворечива? Очевидно, доказательство с помощью непосредственно перебора всевозможных следствий и выяснения отсутствия среди них двух предложений типа X и $\overline{X}$ невозможно хотя бы потому, что мы не можем быть уверены в том, что *а*) известные к моменту осуществления такого перебора следствия — всевозможные и *б*) при дальнейшем развитии теории не встретятся два следствия типа X и $\overline{X}$.

В современной науке непротиворечивость одной аксиоматики сводится к непротиворечивости другой аксиоматики.

Для доказательства непротиворечивости некоторой аксиоматики Σ строится ее модель в множестве объектов и отношений другой теории, основанной на аксиоматике Σ'. Этим самым вопрос о непротиворечивости аксиоматики Σ сводится к вопросу о непротиворечивости другой аксиоматики Σ', а этот вопрос таким же способом сводится к вопросу о непротиворечивости третьей аксиоматики Σ''. Очевидно, этот процесс сведения не может быть бесконечным. Непротиворечивость некоторой, достаточно простой, подтвержденной тысячелетней практикой человечества, теории должна приниматься без доказательства, как аксиома. И здесь обойти практику как критерий истины невозможно. Например, непротиворечивость аксиоматики евклидовой геометрии сводится к непротиворечивости арифметики вещественных чисел путем построения модели этой аксиоматики (или теории, основанной на этой аксиоматике) в множестве объектов и отношений арифметики вещественных чисел (т. е. теории, описывающей множество вещественных чисел). Множество вещественных чисел может быть построено как расширение множества рациональных чисел, множество рациональных чисел — как расширение множества целых чисел, а это множество — как расширение множества натуральных чисел. Арифметика натуральных чисел строится аксиоматически и, таким образом, вопрос о непротиворечивости аксиоматики евклидовой геометрии сводится в конечном итоге к вопросу о непротиворечивости аксиоматики арифметики натуральных чисел.

К вопросу о непротиворечивости арифметики натуральных чисел сводится в конечном итоге и вопрос о непротиворечивости других математических теорий. Например, нетрудно видеть, что вопрос о непротиворечивости аксиоматики А1—А5 теории коммутативной группы (гл. 4) также сводится в конце концов к вопросу о непротиворечивости аксиоматики натуральных чисел. Действительно, мы рассмотрели в качестве одной из моделей теории коммутативной группы множество целых чисел C с введенной в нем операцией сложения, и так как множество C определяется на базе множества N натуральных чисел, то аксиоматика А1—А5 непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика натуральных чисел.

Натуральное число — одно из исходных понятий математики. Оно возникло как отражение простейших потребностей практической деятельности на заре развития человеческого общества. Положения арифметики натуральных чисел, в частности простейшие, принимаемые обычно за аксиомы, абстрагированы из опыта, они подтверждаются тысячелетней практикой человечества.

02.1. Покажем один из возможных способов аксиоматизации арифметики натуральных чисел.

Исходные понятия

Множество натуральных чисел N: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ Определенное натуральное число (индивидуальный объект). 1. Предикат равенства «=». Двухместный предикат (отношение) «непосредственно следует за». Число, непосредственно следующее за x, обозначим через x'.
Операции «+» (сложение) и «·» (умножение).

Предполагается уже имеющимся весь аппарат логики предикатов.

Перечень аксиом

[1] $(a)\,[a = a]$ (рефлексивность равенства);

[2] $(a, b)\,[(a = b) \to (P\,(a) \to P\,(b))]$, если a равно b, то всякое свойство P числа a имеется и у числа b. Из аксиом [1—2] выводимы симметричность и транзитивность равенства;

[3] $(a)\,[\overline{a' = 1}]$ или $(\overline{\exists\,(a)}\,[a' = 1]$ (1—непосредственно не следует ни за каким числом);

[4] $(a)(\exists b)\,[(b = a') \wedge (c)\,((c = a') \to (c = b))]$
(для любого числа существует, притом единственное число, непосредственно следующее за ним);

[5] $(a, b, c)\,[(a = b') \wedge (a = c') \to (b' = c')]$
(любое число непосредственно следует не более чем за одним числом);

[6] $(a)\ [a + 1 = a']$;

[7] $(a, b)\,[a + b' = (a + b)']$ ([6 — 7] — аксиомы сложения);

[8] $(a)\ [a \cdot 1 = a]$

[9] $(a, b)\,[a \cdot b' = (a \cdot b)' + a]$; ([8 — 9] — аксиомы умножения);

[10] $P(1) \wedge (a)\,[P\,(a) \to P\,(a')] \to (b)\ P\,(b)$[1] (аксиома индукции).

Аксиома индукции («Если свойство P имеется у числа 1 и из того, что оно имеется у произвольного a, следует, что оно имеется и у непосредственно следующего за ним числа a', то это свойство имеется у любого числа b») служит формальной основой одноименного метода доказательства (метода математической индукции), широко применяемого, в частности, при развертывании арифметики натуральных чисел на базе приведенной аксиоматики.

Индуктивное доказательство, как известно, состоит из двух этапов. Доказывают теорему, во-первых, для числа 1, во-вторых, предполагая, что она верна для числа n, доказывают, что она верна и для числа, не-

---

[1] Аксиома [10] содержит предикатную переменную $P\ (\ \ )$, вместо которой можно поставить любой конкретный одноместный предикат (свойство). Поэтому данная аксиома по существу является схемой аксиом, включающей бесконечное множество аксиом.

посредственно следующего за n. После этого теорема считается доказанной для любого числа. В школьной практике это обосновывается обычно так: теорема верна для 1, а значит и для 2, так как она верна для 2, то она верна и для 3, из того, что она верна для 3, следует, что она верна и для 4, и т. д.

Однако, что означает «и т. д.»? Можем ли мы, рассуждая так, перебрать все натуральные числа? Разумеется нет, ибо множество натуральных чисел бесконечно. Поэтому приведенное обоснование несостоятельно.

Доказательство методом математической индукции имеет своей основой аксиому индукции. Действительно, пусть свойство P означает принадлежность к множеству M тех натуральных чисел, для которых верна доказываемая теорема. Тогда $P(1)$ означает $1 \in M$; $P(a)$ — $a \in M$ и т. д. Доказывая теорему для 1, мы устанавливаем истинность высказывания $P(1)$; предполагая ее верной для числа a и доказывая, что она в этом случае верна и для a', мы доказываем истинность высказывания

$$(a)\ [P(a) \to P(a')].$$

Следовательно, истинна и конъюнкция:

$$P(1) \wedge (a)\ [P(a) \to P(a')]. \tag{1}$$

Из аксиомы индукции и (1) по правилу заключения получаем: $(b)\ P(b)$, т. е. доказываемая теорема верна для любого натурального числа.

При выбранной аксиоматике [1]—[10] свойства операций (коммутативность, ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и др.) являются выводимыми.

Приведем в качестве примера доказательство ассоциативности сложения:

$$(a, b, c)\ [a + (b + c) = (a + b) + c].$$

Возьмем произвольные a и b и докажем теорему индукцией по c, т. е. M — множество всех тех чисел c, для которых при произвольных a и b теорема верна (свойство P из формулировки аксиомы индукции означает принадлежность к этому множеству).

Докажем сначала, что:

$$(a, b)\ [a + (b + 1) = (a + b) + 1].$$

Действительно,

$$a + (b + 1) = a + b' = (a + b)' = (a + b) + 1.$$

Этим самым мы доказали, что $P(1)$ — истинное высказывание.

Предположим, что для некоторого c имеет место равенство: $a + (b + c) = (a + b) + c$, т. е. что $P(c)$ — истинное высказывание, и докажем, что в этом случае и $P(c')$ — истинное высказывание, т. е. имеет место равенство

$$a + (b + c') = (a + b) + c'.$$

Действительно, $a + (b + c') = a + (b + c)' = a + [(b + c) + 1] = [a + (b + c)] + 1 = [(a + b) + c] + 1 = (a + b) + (c + 1) = (a + b) + c'$.

По аксиоме индукции, так как свойство P имеет место для 1 и из того, что оно имеет место и для c, следует, что оно имеет место и для c', свойство P имеет место для любого натурального числа, т. е. равенство (1) доказано.

Говоря, что аксиомы натуральных чисел подтверждаются практикой, мы имеем в виду, что в реальной действительности встречаются многочисленные, различные модели этой аксиоматики, и вполне естественно принять непротиворечивость арифметики натуральных чисел за аксиому.

Мы уже отметили (гл. 1), что стремления некоторых математиков и философов свести арифметику натуральных чисел к чистой логике оказались безуспешными. Всякие подобные попытки, имеющие конечной целью доказать, что арифметика натуральных чисел и вся математика являются продуктом чистого разума и ничего не отражают в действительном мире, обречены на провал так же, как и, например, попытки создания вечного двигателя.

Практическое подтверждение непротиворечивости одной из простейших математических теорий неизбежно, устранение такого подтверждения в обосновании всей математики невозможно.

03. Вторая проблема, возникающая при аксиоматизации теории,— проблема п о л н о т ы.

Если аксиоматика непротиворечива, то она уже «хороша» в том смысле, что пригодна в качестве базы для развертывания теории. Но тогда возникает вопрос, насколько она «хороша», т. е. насколько полно эта аксиоматика описывает структуру множества объектов, являющуюся предметом данной теории.

Этот вопрос можно уточнить с помощью понятия полноты аксиоматики. Аксиоматика называется п о л н о й, если любое предложение, выраженное в терминах данной теории (т. е. теории, построенной на данной аксиоматике), может быть доказано или опровергнуто на базе этой аксиоматики. Иначе говоря, аксиоматика полна, если любое предложение, выраженное в терминах данной теории, или выводимо из данной аксиоматики, или если не выводимо само, то выводимо его отрицание.

$$\boxed{\Sigma - \text{полная}} \quad (X)[(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow X) \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \overline{X})].$$

(Оба члена дизъюнкции не могут быть истинными в силу того, что мы рассматриваем непротиворечивую аксиоматику.)

Непротиворечивость и полнота аксиоматики могут быть выражены объединенно следующим образом:

$$(X)[\overline{(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow X) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \overline{X})} \wedge$$
$$\wedge ((\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow X) \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \overline{X}))]$$

или

$$(X)[\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X) \dot{\vee} (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \overline{X})].$$

Полнота аксиоматики понимается и в другом смысле.

В любой модели данной аксиоматики удовлетворяются не только аксиомы, но и все следствия этих аксиом, т. е. все теоремы теории, построенной на этой аксиоматике.

Если аксиоматика не является полной, то существует хотя бы одно предложение X, выраженное в терминах данной теории, такое, что ни X, ни $\overline{X}$ не выводимы:

$$(\exists \dot{X})[\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to X} \wedge \overline{\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \overline{X}}].$$

В этом случае в одних моделях данной аксиоматики X может оказаться истинным, в других — ложным.

Если же аксиоматика полна, то всякое предложение X, выраженное в терминах данной теории, или выводимо — и тогда удовлетворяется во всех моделях данной аксиоматики, или же выводимо $\overline{X}$ — и тогда предложение X не удовлетворяется ни в одной модели аксиоматики. Следовательно, всевозможные модели полной аксиоматики характеризуются одними и теми же свойствами отношений и операций, фигурирующих в данной аксиоматике, т. е. они изоморфны.

Мы пришли к следующему, другому смыслу полноты аксиоматики: аксиоматика называется полной, если все ее модели изоморфны.

Два смысла полноты аксиоматики не равносильны. Из полноты в первом смысле, как мы видели, следует полнота во втором смысле. Но из полноты во втором смысле не следует полнота в первом смысле. Так, например, доказано, что аксиоматика натуральных чисел, являясь полной во втором смысле, не является полной в первом смысле. Так как из полноты в первом смысле следует полнота во втором, то (по принципу контрапозиции) из отсутствия полноты во втором смысле следует отсутствие полноты в первом смысле.

Например, аксиоматика А1—А5 теории коммутативной группы (гл. 4) не обладает полнотой во втором смысле, так как две ее модели $[V_0, \cdot]$ и $[V_0^3, \cdot]$ не изоморфны, первая модель — бесконечное множество, вторая — конечное, между ними нельзя установить никакого взаимно-однозначного соответствия. Отсюда следует, что эта аксиоматика не является полной и в первом смысле. Например, на базе аксиоматики А1—А5 нельзя ни доказать, ни опровергнуть предложение «множество G бесконечно».

Очевидно, если требование полноты не удовлетворяется, аксиоматика все-таки пригодна для построения теории. Одним из примеров теорий, построенных на неполной аксиоматике, является теория коммутативной группы.

04. Третья проблема, возникающая в связи с аксиоматизацией теории,— проблема независимости.

Пусть дана аксиоматика $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (Ее можно заменить одной аксиомой, представляющей собой конъюнкцию всех этих аксиом: $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.)

Через Σ_k обозначим аксиоматику, состоящую из конъюнкции данных аксиом, за исключением одной какой-либо аксиомы A_k:

$$\Sigma_k = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge \ldots \wedge A_n.$$

Произвольная аксиома A_k называется независимой, если она не является логическим следствием из остальных аксиом $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n$ данной аксиоматики, т. е. если истинно высказывание

$$\overline{\Sigma_k \to A_k} \quad (1)$$

или равносильное ему высказывание

$$\Sigma_k \wedge \overline{A}_k. \quad (2)$$

Чтобы доказать, что аксиоматика независима, необходимо доказать, что каждая ее аксиома независима.

Пусть нам нужно доказать, что аксиома A_k независима. Тогда составляем новую аксиоматику $\Sigma_k \wedge \overline{A}_k$, и если эта аксиоматика непротиворечива, то A_k независима.

Действительно, допустим, что $\Sigma_k \to A_k$ истинно, т. е. A_k зависима. Тогда и $\Sigma_k \wedge \overline{A}_k \to A_k$ истинно, и так как $\Sigma_k \wedge \overline{A}_k \to \overline{A}_k$ также истинно, то A_k и $\overline{A}_k$ выводимы из $\Sigma_k \wedge \overline{A}_k$, а это значит, аксиоматика $\Sigma_k \wedge \overline{A}_k$ противоречива, что противоречит условию.

Практически, исходя из формулы (2) независимости аксиомы A_k, для доказательства независимости этой аксиомы достаточно построить такую модель, в которой все остальные аксиомы данной аксиоматики удовлетворяются, а аксиома A_k не удовлетворяется.

В качестве примера рассмотрим аксиомы II.1—4 (гл. 3.04), характеризующие структуру $[T, \prec]$ множества точек прямой, установленную с помощью отношения предшествования, и докажем независимость аксиомы II.4. (На прямой нет точки, которая предшествовала бы всем остальным, и нет точки, которой предшествовали бы все остальные.)

Построим модель, в которой аксиомы II.1—3 выполняются, а аксиома II.4 не выполняется. Эту модель мы определим с помощью следующего словаря:

1) множество точек прямой;	1) множество вещественных чисел x, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x \leqslant 1$;
2) предшествует.	2) меньше.

Нетрудно заметить, что в определенной этим словарем модели аксиомы II.1—3 выполняются, а аксиома II.4 не выполняется, так как в этой модели имеется наименьшее число 0, т. е. элемент, предшествующий всем остальным, и наибольшее число 1, т. е. элемент, которому предшествуют все остальные.

Этим и доказана независимость аксиомы II.4.

С проблемой независимости связана известная в истории геометрии проблема п я т о г о п о с т у л а т а. В течение двух тысячелетий от Евклида до Лобачевского были предприняты многочисленные попытки решения этой проблемы. Но все они оказались безуспешными.

Эта проблема состояла в доказательстве того, что аксиома параллельных Евклида (в системе Евклида она занимала место пятого постулата) является логическим следствием остальных аксиом геометрии, т. е. что она не является независимой аксиомой.

В действительности оказалось, что аксиома параллельных независима, и этим объясняется безуспешность всех попыток решения этой проблемы.

Независимость аксиомы параллельных была доказана одновременно с непротиворечивостью геометрической системы Лобачевского во второй половине XIX века. Аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от аксиоматики евклидовой геометрии лишь одной аксиомой параллельных. Аксиома параллельных Лобачевского представляет собой отрицание аксиомы параллельных Евклида. Если через Σ_{Π} обозначить конъюнкцию всех аксиом евклидовой геометрии, за исключением аксиомы параллельных, а аксиому параллельных Евклида обозначить через П, то $\Sigma_{\Pi} \wedge \Pi$ — аксиоматика евклидовой геометрии, а $\Sigma_{\Pi} \wedge \overline{\Pi}$ — аксиоматика геометрии Лобачевского. Отсюда сразу же видно, что непротиворечивость аксиоматики $\Sigma_{\Pi} \wedge \overline{\Pi}$ доказывает независимость аксиомы П от аксиоматики Σ_{Π}, называемой также аксиоматикой абсолютной геометрии (общей части евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского, представляющей собой систему всевозможных следствий из аксиоматики Σ_{Π}).

Непротиворечивость аксиоматики $\Sigma_{\Pi} \wedge \overline{\Pi}$ геометрии Лобачевского была доказана (Бельтрами, Клейном, Пуанкаре) с помощью различных моделей, построенных в множестве объектов и отношений евклидовой геометрии. Этим самым вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского был сведен к вопросу о непротиворечивости евклидовой геометрии, а, следовательно, в конечном итоге к вопросу о непротиворечивости арифметики натуральных чисел.

В каждой из этих моделей удовлетворяется аксиоматика Σ_{Π}, но не удовлетворяется аксиома параллельных Евклида П, следовательно, эта аксиома не является логическим следствием из аксиоматики Σ_{Π} абсолютной геометрии.

Попытки доказательства пятого постулата продолжались и после того, как уже была доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского, и продолжаются в настоящее время. Но эти попытки, во-первых, довольно редкие, во-вторых, уже не принадлежат, как раньше, видным математикам. Их авторы незнакомы с достижениями науки в этой области и поэтому не понимают совершенную безнадежность этих попыток.

Аксиоматика, не удовлетворяющая требованию независимости, может, разумеется, служить базой для построения теории. Такие случаи часто встречаются в преподавании. Так, например, в начале курса геометрии, в VI классе, мы принимаем без доказательства, т. е. за аксиомы, и предложения, выводимые из других. Но это делается из педагогических соображений, чтобы облегчить начинающим усвоение курса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая книга не содержит, разумеется, исчерпывающего решения всех сформулированных во введении проблем и вряд ли такое решение всех этих проблем может быть изложено в одной книге.

Некоторые важные вопросы, как, например, применение аппарата теории множеств и алгебры высказываний к вычислению вероятностей, соотношение и связь теории и практики в преподавании математики, подготовка учителей к решению логических проблем преподавания математики в средней школе и другие, вовсе не рассмотрены в ней.

Однако мы считаем необходимым сделать несколько замечаний, касающихся последнего из упомянутых выше вопросов — подготовки учителя.

Всякая сколько-нибудь существенная реформа, касающаяся содержания или методов обучения математике в средней школе, встречает серьезные трудности, прежде всего связанные с подготовкой учителя. Это вполне понятно, ибо внедрять новое в школьное преподавание можно только через учителя.

Решение логических и других важных проблем преподавания, связанных с повышением уровня и модернизацией математического образования в средней школе, требует улучшения подготовки учителя, в частности его математической, логической и методической подготовки. Не рассматривая здесь детально этот вопрос, ограничимся лишь некоторыми замечаниями.

1. Совершенно очевидно, что модернизация школьного преподавания математики невозможна без модернизации математического образования самого учителя. Однако процесс приближения математического образования учителя к современной математической науке протекает очень медленно. До сих пор в учебных планах физико-математических факультетов педагогических институтов фигурирует обширный курс под названием «Элементарная математика», включающий разделы классической элементарной математики. Некоторые считают этот курс очень важным для математической подготовки учителя, очевидно, не представляя различный смысл термина «элементарная математика», о чем говорилось во введении.

Нам представляется, что номенклатура математических дисциплин в педагогическом вузе должна быть приведена в соответствие с научной номенклатурой. Разделы курса элементарной математики должны включаться в соответствующие научные дисциплины: арифметика — в теорию чисел, элементарная геометрия — в геометрию, элементарная алгебра — в алгебру, учение о тригонометрических функциях — в математический анализ.

Это — не просто терминологический вопрос. При таком распределении материала классической элементарной математики расширяется возможность его освещения с современных позиций.

До последнего времени в учебных планах физико-математических факультетов, в частности, готовящих учителей по широкому профилю «математика и физика», не встречались названия «теория вероятностей», «математическая логика» (они появились только в проекте учебного плана на 1963/64 учебный год), и это в то время, когда идет широкое обсуждение вопроса о включении элементов теории вероятностей и математической статистики в школьный курс, когда в юношеских математических школах учащиеся знакомятся с элементами математической логики.

Совершенно очевидно, что отставание математического образования учителя от современной науки не способствует развитию среднего математического образования, а тормозит его. Развитие математического образования учителя должно опережать развитие школьного преподавания математики, чтобы обеспечить школу будущего подготовленными учителями.

2. В течение многих лет на физико-математических факультетах не читался ни курс математической логики, ни даже курс элементарной традиционной логики, который преподается на филологических факультетах. Авторы учебных планов, очевидно, рассуждают так: «Математика содержит в себе столько логики, что студенты-математики и без специального изучения логики научатся логически мыслить». Так рассуждают многие, однако они ошибаются.

Учитель должен обладать высокой логической культурой, которой не может быть без сознательной тренировки в логических доказательствах, без знания выполняемых логических операций и применяемых средств логического вывода.

Важное значение в области логической подготовки учителя имеют курсы оснований арифметики и оснований геометрии, однако их изучение в педагогических вузах и имеющаяся учебная литература по этим курсам не отражают современного состояния науки об основаниях математики.

Таким образом, в области логической подготовки учителя математики возникают следующие проблемы:

а) разработка курса математической логики с учетом потребностей общего образования учителя и школьного преподавания математики;

б) приведение курсов оснований арифметики и оснований геометрии в соответствие с современным состоянием науки об основаниях математики или же замена этих двух курсов одним курсом оснований математики, построенным в современном стиле.

3. Слабой является и методическая подготовка, получаемая учителем в педагогическом вузе. Один из существенных дефектов этой подготовки состоит в ее отрыве от математической подготовки. С одной стороны, в различных математических курсах, читаемых в педагогическом вузе, недостаточно учитываются потребности школьного преподавания; с другой — знания, приобретенные студентами при изучении различных математических дисциплин, недостаточно используются в курсе методики преподавания математики.

Одна и та же программа математической дисциплины может быть по-разному изложена в зависимости от целей, преследуемых ее изучением. Выявление связей со школьным преподаванием представляет собой важную и далеко еще не решенную проблему преподавания математических дисциплин в педагогическом вузе.

Очевидно, сложившийся курс методики преподавания математики в педагогическом вузе нуждается в значительном усовершенствовании и модернизации. Главной целью этого курса должно быть развитие у студентов творческого подхода к школьному преподаванию математики на базе понимания его связей с современной математической наукой, педагогикой, логикой и психологией учащихся. Студенты должны широко привлекаться к педагогическим экспериментам.

4. Нужна большая работа по усовершенствованию и повышению квалификации уже работающих учителей и особенно тех, которые окончили педагогический вуз 10—15 лет назад. Здесь возникают трудности психологического характера. Учителям, уже давно работающим и хорошо усвоившим традиционную методику, трудно представить себе, что преподавание математики может быть иным, что предлагаемые изменения необходимы для устранения отставания образования от прогресса науки и что они действительно приведут к повышению эффективности обучения.

У нас выходит мало литературы, необходимой для повышения квалификации учителей. Не отрицая значения различных методических разработок, описаний опыта преподавания, оказывающих несомненную помощь в работе учителя и способствующих повышению его квалификации, нельзя, очевидно, ограничиваться этим. Учитель нуждается и в такой литературе, которая помогла бы ему усвоить важные идеи современной математики и понять возможность их отражения в школьном преподавании.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Столяр Абрам Аронович

Логические проблемы преподавания математики. Минск, „Высшая школа", 1965.

254 стр.

Редактор *Шердюкова С. И.*
Худож. редактор *Кононов А. А.*
Техн. редактор *Кислякова М. Н.*
Корректоры *Кришталь В. К., Сушко К. В.*

АТ 0445. Сдано в набор 3/X 1964 г. Подписано к печати 3/III 1965 г. Тираж 4855 экз. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 16. Уч.-изд. л. 14,3. Изд. № 833. Заказ 2351. Цена 70 коп.

Издательство „Высшая школа"
Государственного комитета
Совета Министров БССР по печати.
Редакция физико-математической литературы
Тем. план 1965 г., № 29.
Минск, ул. Кирова, 24.

* * *

Полигр. ф-ка «Кр. звезда».
Минск, ул. Островского, 17.

А. А. Столяр

ЛОГИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

Издательство
«Вышэйшая школа»
Минск 1971

С81
51

УДК 51

$\frac{2-2}{9-71}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое «Логическое введение в математику» предназначается для студентов первого года обучения математических специальностей педагогических институтов. Оно содержит элементы теории множеств, математической логики и их применение в математике, иллюстрированные известным из школьного курса элементарным математическим материалом. Это содержание еще не является установившимся, оно не зафиксировано в каких-либо официальных программах и может служить предметом обсуждения. Однако предлагаемое содержание представляет собой то общее, что встречается во многих проектах такого вводного курса, целесообразность которого уже является в настоящее время общепризнанной.

Необходимость в таком Логическом введении возникает потому, что средняя школа не обеспечивает (пока) своих выпускников достаточным пониманием логического компонента (логики) математики и способов математического мышления.

Основная цель курса «Логическое введение в математику» — привитие студентам некоторых навыков современного математического мышления и его точного, краткого и ясного выражения. Одновременно с этим достигается и повторение наиболее важных понятий школьной математики (числа, функции, уравнения, неравенства и др.) с новой точки зрения или на более высоком уровне, а также уточнение логических понятий и процедур (определения, обратного и противоположного предложений, необходимого и достаточного условий, доказательства, отношений эквивалентности и порядка и др.), широко применяющихся в школьном курсе на интуитивном уровне или в неявном виде. Все это должно облегчить студентам последующее изучение различных математических дисциплин и методики современного преподавания математики в школе.

В предлагаемом пособии материал излагается содержательно, без излишней формализации и с умеренным использованием символического логико-математического языка после детального разъяснения его семантики, точного смысла выражений.

Материал разбит на четыре главы: Множества, Высказывания, Предикаты и Применение в математике. Особое внимание как в изложении материала, так и в упражнениях уделяется анализу рассуждений средствами логики высказываний, предикатов и множеств, подготавливающему к пониманию логической структуры математических доказательств.

Приведенные в книге примеры применения логики в математике (в примерах и упражнениях первых трех глав и в четвертой главе), разумеется, не исчерпывают всех случаев применения логики в математике. Рассмотрение некоторых вопросов носит лишь предварительный характер первого ознакомления.

В книге содержится достаточное число упражнений для самостоятельной работы студентов.

Предлагаемое пособие составлено по материалам лекций, прочитанных автором в 1968/69 учебном году в Могилевском педагогическом институте.

Автор выражает свою глубокую благодарность докт. физ.-мат. наук, проф. Ю. С. Богданову и докт. физ.-мат. наук, проф. М. Д. Гриндлингеру, любезно согласившимся ознакомиться с рукописью и сделавшим ряд полезных замечаний.

Автор

Глава 1. МНОЖЕСТВА

§ 1. МНОЖЕСТВО

1. 1. Множество. Одно из основных понятий современной математики — *множество*. Это понятие обычно принимается за первоначальное и поэтому не определяется через другие.

Когда мы говорим, что под множеством предметов понимаем «совокупность, собрание, или класс каких-нибудь различимых предметов, безразличио какой природы», мы указываем лишь синонимы («совокупность», «собрание», «класс») для слова «множество» с целью достижения интуитивной ясности смысла, в котором оно применяется. Этот смысл поясняется и многочислеиными примерами. Так, можно говорить о множестве всех студентов первого курса, о множестве всех жителей города Минска (о населении города Минска), о множестве молекул данного тела, о множестве овец (отаре) колхозной фермы, о множестве всех целых чисел, о множестве точек плоскости, отстоящих от данной точки 0 на расстоянии 1 (окружности с центром в точке 0 и радиусом 1), о множестве рациональных корней данного уравнения и т.д.

Когда в математике говорят о множестве (чисел, точек, функций и т. д.), то объединяют эти объекты в одно целое — множество, состоящее из этих объектов (чисел, точек, функций и т. д.). Основатель теории множеств, немецкий математик Георг Кантор (1845 — 1918) выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое, целое».

Слово «множество» в обычном смысле всегда связывается с большим числом предметов. Например, мы говорим, что в лесу множество деревьев, но если перед домом два дерева, в обыденной речи не говорят, что перед домом «множество деревьев».

Математическое же понятие множества не связывается обязательно с большим числом предметов. В математике удобно рассматривать и «множества», содержащие 3, 2 или 1 предмет и даже «множество», не содержащее ни одного предмета (*пустое* множество). Например, мы говорим о множестве решений уравнения, до того как узнаем, сколько оно имеет решений, и в том случае, когда уравнение не имеет решений (множество вещественных решений уравнения $x^2+1=0$ — пустое множество).

Произвольные множества мы обозначим большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$ Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

1. 2. Элементы множества. О предметах, составляющих множество, говорят, что они *принадлежат* этому множеству, или являются его *элементами*.

Элементы множества мы обозначим малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ или одной какой-нибудь буквой с индексом, например $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Предложение «предмет a принадлежит множеству A», или «предмет a — элемент множества A», обозначим символом $a \in A$.

Например, предложение «0 — целое число», если через C обозначить множество всех целых чисел, запишется так: $0 \in C$.

1.3. Способы задания множества. Множество может быть задано непосредственным перечнем, перечислением всех его элементов (в произвольном порядке). В таком случае названия всех элементов множества записываются в строчку, отделяются между собой запятыми и заключаются в фигурные скобки. Например, $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ — множество цифр десятичной системы счисления, $\{a, b,$

$c\}$ — множество, состоящее из элементов a,b,c (это множество можно записать и так: $\{b,a,c\}$, или $\{c,a,b\}$, или перечислив элементы в каком-либо другом порядке). Необходимо различать объекты, обозначаемые символами a и $\{a\}$. Символом a обозначается предмет, символом $\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a (*единичное* множество).

Перечислением всех элементов можно задать лишь *конечное* множество. Такое же множество, как, например, множество всех натуральных или всех целых чисел, нельзя задать таким способом, так как мы не можем перечислить все натуральные или все целые числа—таких чисел *бесконечное* множество.

Имеется другой, универсальный, способ задания множества в том смысле, что этим способом может быть задано не только конечное, но и бесконечное множество.

Множество (конечное или бесконечное) может быть задано указанием *характеристического свойства*, т. е. такого свойства, которым обладают все элементы этого множества и не обладает ни один предмет, не являющийся его элементом. Например, множество $\{0,1,2,3,4\}$ может быть задано характеристическим свойством как множество всевозможных остатков от деления любого натурального числа на 5.

Множество, определяемое некоторым характеристическим свойством P, обозначим символом $\underset{x}{M}[P(x)]$, который читается так: «множество всех x таких, что x обладает свойством P», или, короче, «множество всех x, обладающих свойством P».

Например, если P обозначает свойство «быть остатком от деления натурального числа на 5», то $P(x)$ обозначает предложение «x — остаток от деления натурального числа на 5», а $\underset{x}{M}[P(x)] = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Вообще символ $P(x)$ обозначает предложение «x обладает свойством P» (при более детальном изучении этого объекта (гл. 3) получит оправдание и применение функционального символа).

В математике часто характеристическое свойство множества выражается с помощью уравнения или неравенства. Так, $\underset{x}{M}[x^2 + 2 = 3x]$ множество всех тех и только тех значений x из заданной области значений этой переменной, например из множества вещественных чисел, которые «удовлетворяют» уравнению $x^2 + 2 = 3x$. В этом случае $\underset{x}{M}[x^2 + 2 = 3x] = \{1, 2\}$ — множество решений уравнения $x^2 + 2 = 3x$.

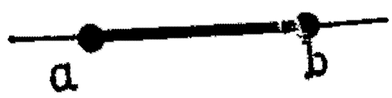
В той же области значений переменной x $\underset{x}{M}[x > 0]$ — множество всех положительных вещественных чисел.

1.4. Числовые множества. Элементами множества могут быть предметы различной природы (буквы, числа, люди, атомы, слова, точки, уравнения и т. д.). Именно этим объясняется общность теоретико-множественных понятий и их применимость к самым разным областям (математике, физике, лингвистике, экономике, биологии и т. д.). Для математики, разумеется, особую роль играют изучаемые ею множества, элементами которых являются «математические» объекты (числа, точки, уравнения, функции и т. д.).

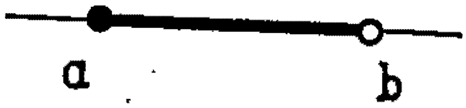
Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми* множествами.

Ввиду того, что в математике мы очень часто имеем дело с некоторыми определенными числовыми множествами, удобно ввести для этих множеств специальные обозначения.

Мы введем следующие обозначения*, которыми будем в дальнейшем пользоваться:

Название множества	Обозначение	
1	2	
Множество всех натуральных чисел	N	
Множество всех целых неотрицательных чисел	N_0	
Множество всех целых чисел	C	Z
Множество всех рациональных чисел	R	Q
Множество всех вещественных чисел (действительных)	D	R
Множество всех комплексных чисел	K	
$\underset{x \in D}{M[a \leqslant x \leqslant b]}$ (множество всех вещественных чисел, заключенных между числами a и b, включая эти числа) — *замкнутый отрезок*	$[a, b]$ 	

*В литературе встречаются и другие обозначения некоторых перечисленных ниже множеств: Z — множество всех целых чисел; Q — множество всех рациональных чисел; R — множество всех вещественных чисел; (a, b) — открытый отрезок.

1	2
$\underset{x \in D}{M}[a < x < b]$ (множество всех вещественных чисел, заключенных между числами a и b, не включая эти числа) — *открытый отрезок*	$]a,\ b[$ (a,б) 
$\underset{x \in D}{M}[a < x \leqslant b]$ — отрезок, открытый снизу и замкнутый сверху	$]a,\ b]$ 
$\underset{x \in D}{M}[a \leqslant x < b]$ — отрезок, замкнутый снизу и открытый сверху	$[a,\ b[$ 
$\underset{x \in D}{M}[x > a]$ — отрезок, открытый снизу и *неограниченный* сверху	$]a,\ +\infty\,[$* 
$\underset{x \in D}{M}[x \geqslant a]$ — отрезок, замкнутый снизу и неограниченный сверху	$[a,\ +\infty\,[$ 
$\underset{x \in D}{M}[x < a]$—отрезок, открытый сверху и неограниченный снизу	$]-\infty\ ,a[$ 
$\underset{x \in D}{M}[x \leqslant a]$—отрезок, замкнутый сверху и неограниченный снизу	$]-\infty\ ,a]$ 

* Символ $+\infty$ (читается «плюс бесконечность») обозначает отсутствие «верхней границы» множества, т. е. что данному множеству принадлежат сколь угодно большие числа, и не обозначает никакого числа. Поэтому $+\infty$ не может принадлежать числовому множеству; со стороны этого символа отрезок всегда открытый.

Упражнения

1. Задать с помощью характеристического свойства:

а) множество всех положительных чисел $\underset{x}{M}[\quad]$; б) множество всех неотрицательных чисел $\underset{x}{M}[\quad]$; в) множество всех отрицательных чисел $\underset{x}{M}[\quad]$; г) множество всех неположительных чисел $\underset{x}{M}[\quad]$.

2. Задать перечислением всех элементов множества, заданные с помощью характеристического свойства:

а) $\underset{x\in N}{M}[x<5]=\{\qquad\}$; б) $\underset{x\in C}{M}[0<x<5]=\{\qquad\}$;

в) $\underset{x\in N_0}{M}[x\leqslant 5]=\{\qquad\}$; г) $\underset{x\in C}{M}[0\leqslant x\leqslant 5]=\{\qquad\}$;

д) $\underset{x\in N_0}{M}[x\leqslant 0]=\{\qquad\}$; е) $\underset{x\in N}{M}[x<0]=\{\qquad\}$;

ж) $\underset{x\in N}{M}[x<2]=\{\qquad\}$; з) $\underset{x\in C}{M}[|x|<2]=\{\qquad\}$;

и) $\underset{x\in N}{M}[x\leqslant 2]=\{\qquad\}$; к) $\underset{x\in C}{M}[|x|\leqslant 2]=\{\qquad\}$.

3. Можно ли задать перечислением всех элементов множество:

а) $\underset{x\in C}{M}[x<5]$; б) $\underset{x\in N}{M}[x>5]$; в) $\underset{x\in N_0}{M}[x\leqslant 0]$; г) $\underset{x\in C}{M}[|x|>2]$?

4. Записать и изобразить в виде отрезков следующие множества:

а) $\underset{x\in D}{M}[2<x<5]$; б) $\underset{x\in D}{M}[2\leqslant x\leqslant 5]$; в) $\underset{x\in D}{M}[2\leqslant x<5]$; г) $\underset{x\in D}{M}[2<x\leqslant 5]$; д) $\underset{x\in D}{M}[x<2]$; е) $\underset{x\in D}{M}[x\leqslant 2]$; ж) $\underset{x\in D}{M}[x>2]$; з) $\underset{x\in D}{M}[x\geqslant 2]$; и) $\underset{x\in D}{M}[|x|<2]$; к) $\underset{x\in D}{M}[|x|\leqslant 2]$.

5. Задать перечислением всех элементов множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных решений уравнения $P(x)$:

$$(x+1)(x-1)(2x-1)(x^2-2)(x^2+1)=0,$$

т. е. а) $\underset{x\in N}{M}[P(x)]=\qquad$; б) $\underset{x\in C}{M}[P(x)]=\qquad$; в) $\underset{x\in R}{M}[P(x)]=\qquad$; г) $\underset{x\in D}{M}[P(x)]=\qquad$; д) $\underset{x\in K}{M}[P(x)]=\qquad$.

6. Задать перечислением всех элементов множество всех делителей * числа 36. Можно ли задать таким способом множество всех кратных числа 36?

§ 2. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

Два множества могут находиться в различных отношениях. Здесь мы рассмотрим два отношения: включение и равенство.

2.1. Включение. Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ положительных делителей числа 24 и множество $B = \{1, 2, 4, 8\}$ положительных делителей числа 8.

Сравнивая эти множества, мы замечаем, что все элементы множества B являются также элементами множества A. В таком случае говорят, что множество B *включается* в множество A, или множество A *включает* множество B, или B — *подмножество* (или *часть*) множества A, что обозначается $B \subseteq A$.

В общем виде это отношение между двумя множествами определяется следующим образом.

Определение. *Множество B включается в множество A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A. Множество B называется подмножеством или частью множества A.*

Отношение включения обозначается символом $\subseteq$, т. е. предложение «множество B включается в множество A» записывается: $B \subseteq A$.

Наглядно это отношение (как и другие отношения) между множествами изображается как отношение между двумя множествами точек, ограниченными простыми (само-

---

* Имеются в виду положительные делители.

непересекающимися) замкнутыми кривыми. Такое изображение называется *диаграммой Венна**.

На рис. 1 дана диаграмма Венна для случая, когда $B \subseteq A$.

Примеры. $N \subseteq C$; $C \subseteq R$; $R \subseteq D$; $D \subseteq K$; множество прямоугольников включается в множество параллелограммов (всякий прямоугольник — параллелограмм); множество параллелограммов включается в множество четырехугольников; множество учащихся класса включается в множество учащихся (данной) школы и т. д.

Из определения включения непосредственно следуют такие свойства этого отношения:

1. Всякое множество включается в само себя, т. е. для всякого A $A \subseteq A$.

Это свойство (находиться с самим собой в данном отношении) называется *рефлексивностью*, а отношение включения, обладающее этим свойством, — *рефлексивным* отношением.

2. Для любых множеств A, B, C, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Это свойство называется *транзитивностью*, а отношение включения, обладающее этим свойством, — *транзитивным* отношением.

3. $\varnothing \subseteq A$ для всякого множества A (так как пустое множество не содержит ни одного элемента, то можно считать, что «все его элементы» принадлежат любому множеству A).

2.2. Равенство. Частным случаем включения является *равенство*.

---

* По имени английского ученого Джона Венна (1834 — 1923). Впрочем, намного раньше Венна Л. Эйлер использовал круги для изображения отношения между множествами («Письма к немецкой принцессе», 1768).

Пусть A — множество всех равносторонних треугольников, а B — множество всех равноугольных треугольников. Каждый равносторонний треугольник является также равноугольным, т. е. $A \subseteq B$. Верно и что всякий равноугольный треугольник является равносторонним, т. е. $B \subseteq A$.

В таком случае, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, множества A и B состоят из одних и тех же элементов и называются *равными*.

В общем виде отношение равенства определяется следующим образом.

Определение. *Два множества A и B называются равными, если*

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A,$$

т. е. если множества A и B состоят из одних и тех же элементов.

Символически равенство множеств A и B обозначается: $A = B$.

Равенство множеств характеризуется следующими свойствами (которыми, впрочем, характеризуется и равенство чисел):

1. Для всякого A $A = A$ (равенство рефлексивно).

2. Для любых трех множеств A, B, C, если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (равенство транзитивно).

3. Для любых двух множеств A, B, если $A = B$, то $B = A$ (это свойство называется *симметричностью*, а отношение, обладающее этим свойством, — *симметричным*; равенство симметрично).

2.3. Строгое включение. Как показывают приведенные выше примеры, если $B \subseteq A$, то возможны два случая:

1) существует хотя бы один элемент множества A, не принадлежащий множеству B. В таком случае говорят,

что B — *собственная* часть (или собственное подмножество) A, или что B *строго* включается в A. Отношение строгого включения обозначим $B \subset A$;

2) не существует ни одного элемента множества A, не принадлежащего B. Этот случай равносилен отношению $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т. е. равенству $B = A$.

Если два множества содержат, кроме общих элементов, и необщие (хотя бы один), то они не находятся в отношении включения.

К вопросу об отношениях между двумя множествами мы возвратимся после рассмотрения операций над множествами.

Упражнения

7. Определить отношение между множествами:

а) $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}_0$; б) $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{D}$; г) прямоугольников и параллелограммов с равными диагоналями; д) прямоугольников и четырехугольников с равными диагоналями; е) $]3, 5[$ и $]3, 5]$; ж) $]2, 7[$ и $[3, 5]$; з) $E_1 = \underset{x}{M}\,[x^2 - 3x + 2 = 0]$ и $E_2 = \underset{x}{M}\,[x - 2 = 0]$; и) $A = \underset{x \in D}{M}\,[x^2 + 1 = 0]$ и $B = \underset{x \in K}{M}\,[x^2 + 1 = 0]$; к) $O_1 = [2, +\infty[$ и $O_2 =]2, +\infty[$.

8. В чем ошибочность следующих формулировок:

а) Если элементы множества A принадлежат другому множеству B, то множество A включается в B; б) Если два множества содержат одни и те же элементы, то они равны? Как исправить эти формулировки?

9. Что и по какому свойству следует из:

а) $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{D}$; в) $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{K}$?

10. Доказать, что если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $C \subseteq A$, то $A = B = C$.

11. Построить диаграмму Венна для трех множеств A, B, C, если известно, что $A \subset B$ и $B \subset C$. Является ли отношение строгого включения транзитивным?

12. Что следует из $A \subseteq \varnothing$?

3.1. Объединение множеств. Пусть A — множество все прямоугольных равнобедренных треугольников, а B — мно жество всех прямоугольных неравнобедренных треуголь ников. Если «объединить» эти два множества в одно, т получим множество всех прямоугольных треугольников. Это множество называется *объединением* множеств A и B.

Рассмотрим другие примеры. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$. В этом случае объединение множеств A и B, которое обычно обозначается «$A \cup B$», содержит все элементы множества A и все элементы множества B: $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}$.

Если же $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, b, e\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, т. е. общие элементы множеств A и B входят в объединение $A \cup B$ только по одному разу, так как в соответствии с пониманием множества в математике ни один элемент не может содержаться в множестве несколько раз.

В общем виде объединение двух множеств определяется следующим образом.

Определение. *Объединением $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A* ***или*** *множеству B.*

Это определение можно записать кратко так:

$$A \cup B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\,[x \in A \text{ **или** } x \in B]$$

($\underset{Df}{=}$ читается «равно по определению», *Df* — от латинского *definitio* — определение).

Союз «или» понимается здесь в «неразделительном» смысле, т. е. каждый элемент объединения $A \cup B$ должен принадлежать **хотя бы** одному из множеств A, B (или A, или B, или обоим множествам A и B).

На диаграмме (рис. 2) заштриховано объединение $A \cup B$.

При решении неравенств часто приходится образовывать объединение множеств. Пусть, например, требуется решить неравенство $|x-2|>1$ в множестве $\boldsymbol{D}$, т. е. определить

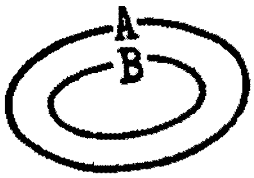


Рис. 1

Рис. 2

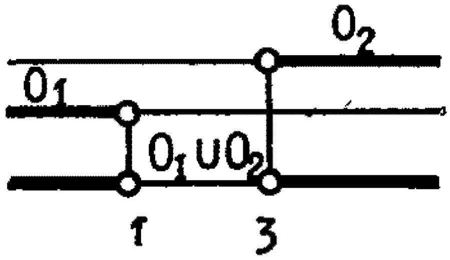


Рис. 3

$\underset{x\in D}{M}[|x-2|>1]$. Так как $|x-2|>1$ равносильно $x-2<-1$ **или** $x-2>1$, т. е. $x<1$ **или** $x>3$, то $\underset{x\in D}{M}[|x-2|>1] = \underset{x\in D}{M}[x<1$ **или** $x>3] = \underset{x\in D}{M}[x<1] \cup \underset{x\in D}{M}[x>3] =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ (рис. 3).

3.2. Пересечение множеств. В классе имеется танцевальная группа $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и хоровая группа $B=\{a, b, c, m, n, o, p, r, s, t\}$. Учащиеся, являющиеся членами обеих групп, образуют множество $\{a, b, c\}$, называемое *пересечением* множеств A и B и обозначаемое символом «$A \cap B$».

В общем виде пересечение двух множеств определяется следующим образом.

Определение. *Пересечением* $A \cap B$ *двух множеств* A *и* B *называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству* A, *и множеству* B *(т. е. их общая часть).*

Это определение можно записать кратко так:

$$A \cap B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}[x \in A \text{ и } x \in B].$$

На рис. 4 заштриховано множество $A \cap B$.

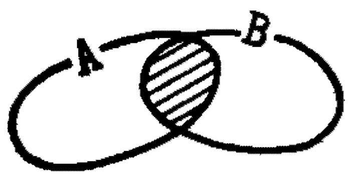


Рис. 4

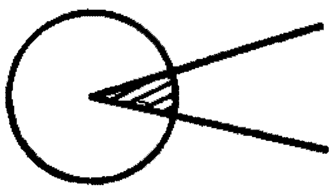


Рис. 5

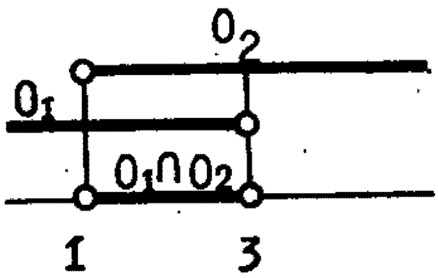


Рис. 6

Примеры. 1) Пусть A — множество простых чисел, B — множество положительных четных чисел. Тогда $A \cap B = \{2\}$.

2) Когда мы говорим: «квадрат — равносторонний и прямоугольный параллелограмм», мы выделяем множество квадратов как пересечение двух множеств: множества равносторонних параллелограммов (ромбов) и множества прямоугольных параллелограммов (прямоугольников), т. е. если A — множество ромбов, а B — множество прямоугольников, то $A \cap B$ — множество квадратов.

3) Пусть K — множество всех точек круга, включая точки окружности, Y — множество всех внутренних точек угла, с вершиной в центре круга, включая точки, лежащие на сторонах угла. Пересечение $K \cap Y$ — множество всех точек кругового сектора, заштрихованного на рис. 5.

4) При решении неравенств часто приходится образовывать пересечение множеств. Пусть, например, требуется решить неравенство $|x-2|<1$ в множестве D, т. е. определить $\underset{x\in D}{M}[|x-2|<1]$.

Так как $|x-2|<1$ равносильно $-1<x-2<1$, т. е. $x-2<1$ и $x-2>-1$, или $x<3$ и $x>1$, то $\underset{x}{M}[|x-2|<1]=\underset{x}{M}[x<3$ и $x>1]=\underset{x}{M}[x<3]\cap\underset{x}{M}[x>1]=]-\infty, 3[\cap]1, +\infty[=]1, 3[$ (рис. 6).

Упражнения

13. Пусть A — любое множество. Чему равны множества $A\cup\varnothing$ и $A\cap\varnothing$?

14. Доказать, что $A\cup B=A$, если и только если $B\subseteq A$.

15. Доказать, что $A\cap B=A$, если и только если $A\subseteq B$.

16. Доказать, что если $A\cup B=A$ для любого множества A, то $B=\varnothing$.

17. Доказать, что если $A\cap B=B$ для любого множества A, то $B=\varnothing$.

18. Чему равны множества $A\cup A$ и $A\cap A$?

19. Пусть $E_1=\underset{x\in D}{M}[x^2+x-20=0]$ и $E_2=\underset{x\in D}{M}[x^2+x-12=0]$. Задать множества E_1 и E_2 перечислением элементов. Образовать множества $E_1\cup E_2$ и $E_1\cap E_2$.

20. Пусть $E_1=\underset{x\in C}{M}[x-3<5]$ и $E_2=\underset{x\in C}{M}[2x+5>9]$. Образовать множества $E_1\cup E_2$ и $E_1\cap E_2$.

21. Образовать множества $O_1\cup O_2$ и $O_1\cap O_2$, если

а) $O_1=[-3, 5]$; $O_2=]-\infty, 2]$; б) $O_1=]-\infty, 5[$; $O_2=[0, +\infty[$; в) $O_1=]4, 8[$; $O_2=]1, 4]$; г) $O_1=]-3, 7]$; $O_2=[5, 6]$; д) $O_1=]0,8[$; $O_2=[-5, 1]$; е) $O_1=[0, 5]$; $O_2=]-3, 0[$; ж) $O_1=]-\infty, 3]$; $O_2=]3, +\infty[$; з) $O_1=]-\infty, 3[$; $O_2=]3, +\infty[$.

Изобразить множества O_1, O_2, $O_1\cup O_2$ и $O_1\cap O_2$ на прямой.

22. Записать множество $\underset{x}{M}[|x|<1]$ в виде пересечения двух множеств, множество $\underset{x}{M}[|x|>1]$ в виде объединения двух множеств. Изобразить эти множества на прямой.

23. Решить неравенство:

а) $|x-1|\leqslant 2$; б) $|x-1|<2$; в) $|x-1|\geqslant 2$; г) $|x-1|>2$.

3.3. Свойства объединения и пересечения. Из определений объединения и пересечения непосредственно следуют такие свойства этих операций. Для всяких множеств A, B, C:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
2. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);
7. $A \cup \varnothing = A$;
8. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Два свойства дистрибутивности (5 и 6), иллюстрируются на диаграмме (рис. 7).

На рис. 7, *а* двояко заштриховано множество $A \cap (B \cup C)$, а на рис. 7, *б* заштриховано множество $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Видно, что

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

На рис. 7, *в* заштриховано множество $A \cup (B \cap C)$,а на рис. 7, *г* двояко заштриховано множество $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Видно, что

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Пример доказательства.

Рассмотрим доказательство свойства 6 дистрибутивности объединения относительно пересечения исходя из определений операций и равенства множеств.

Нам необходимо доказать, что множества $E_1 = A \cup (B \cap C)$ и $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ равны, т. е. 1) если $x \in E_1$, то $x \in E_2$ $(E_1 \subseteq E_2)$ и 2) если $x \in E_2$, то $x \in E_1$ $(E_2 \subseteq E_1)$.

1) Пусть $x \in E_1$. Тогда $x \in A$ **или** $x \in B \cap C$.

Если истинно $x \in A$, то $x \in A \cup B$ **и** $x \in A \cup C$, следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т. е. $x \in E_2$.

Если истинно $x \in B \cap C$, то $x \in B$, следовательно, $x \in A \cup B$, и $x \in C$, следовательно, $x \in A \cup C$. Значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т. е. $x \in E_2$.

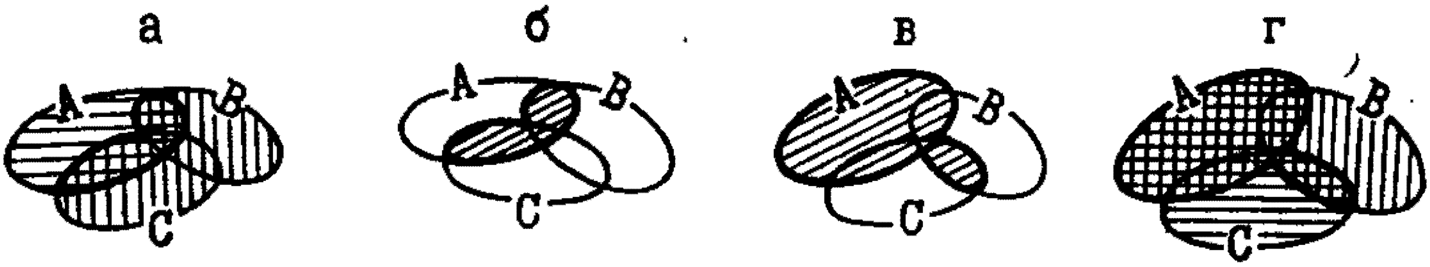


Рис. 7

Мы доказали, что для всякого x, если $x \in E_1$, то $x \in E_2$, т. е.

$$E_1 \subseteq E_2.$$

2) Пусть $x \in E_2$. Тогда $x \in A \cup B$, а следовательно, $x \in A$ **или** $x \in B$ **и** $x \in A \cup C$, а следовательно, $x \in A$ **или** $x \in C$.

Для всякого x, или $x \in A$, или $x \notin A$ («x не принадлежит A»). Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$, т. е. $x \in E_1$.

Если же $x \notin A$, то $x \in B$ **и** $x \in C$, следовательно, $x \in B \cap C$. Отсюда следует, что $x \in A \cup (B \cap C)$, т. е.

$$x \in E_1.$$

Мы доказали, что для всякого x, если $x \in E_2$, то $x \in E_1$, т. е.

$$E_2 \subseteq E_1.$$

Так как $E_1 \subseteq E_2$ и $E_2 \subseteq E_1$, то $E_1 = E_2$, что и требовалось доказать.

Упражнения

24. Доказать свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения.

25. Мы определили объединение и пересечение как *бинарные* операции (выполняемые над *двумя* множествами). На основании какого свойства можно говорить в строго определенном смысле об объединении и пересечении трех множеств ($A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$) и вообще n множеств ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$)? ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ — краткая запись объединения $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A$ — краткая запись пересечения $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.)

26. Образовать пересечение множеств $O_1 =]-\infty, 2[$, $O_2 = [1, 5]$ и $O_3 = [2, +\infty[$ и изобразить его на прямой.

3.4. Всевозможные отношения между двумя множествами. Возвратимся к вопросу об отношениях, в которых могут находиться два множества.

Пусть даны два множества A и B.

Возможно, что эти множества не имеют общих элементов, т. е.

$$A \cap B = \varnothing. \tag{1}$$

В таком случае A и B называются *непересекающимися* множествами.

Если же

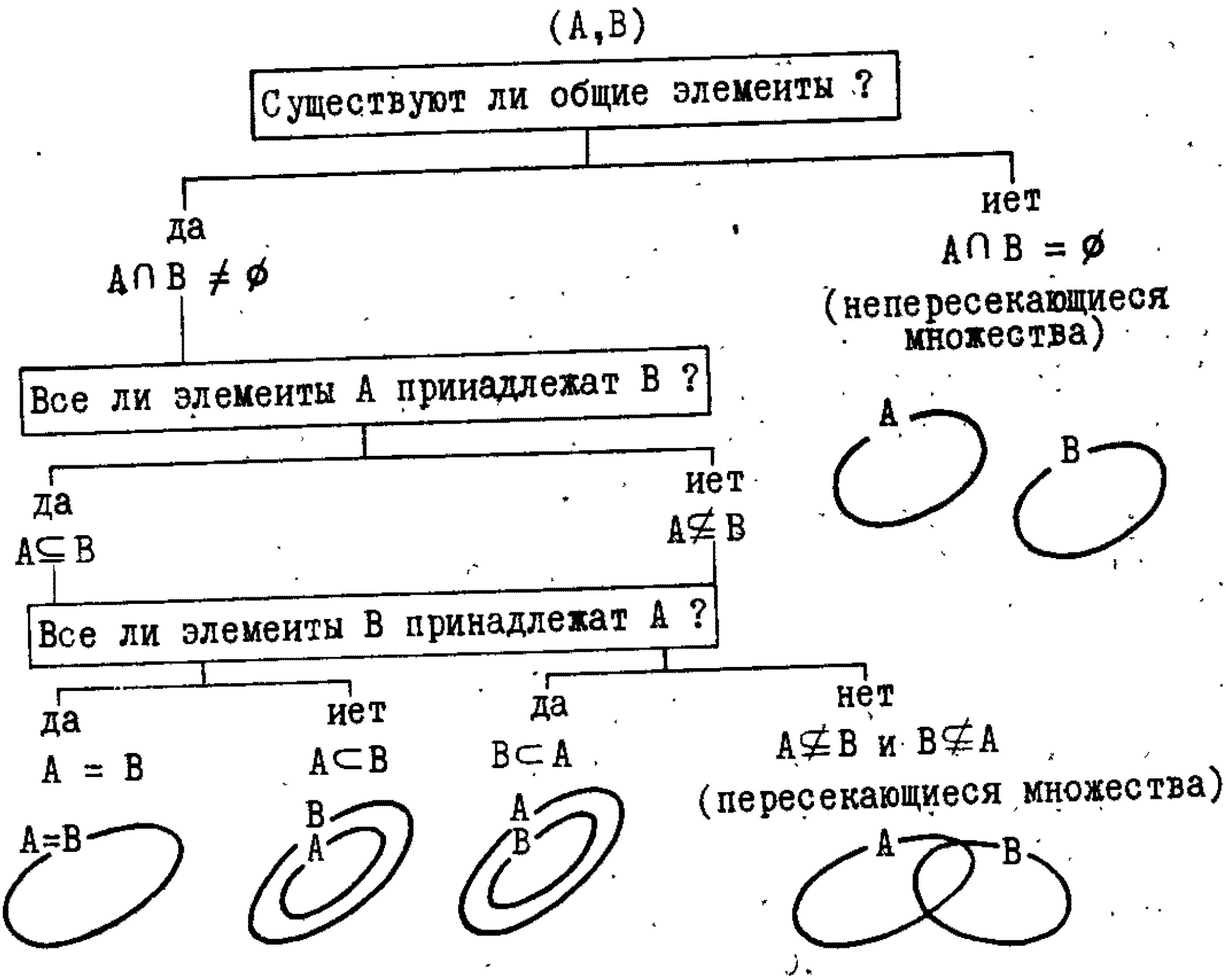
$$A \cap B \neq \varnothing, \tag{2}$$

то возможно, что все элементы A принадлежат B, т. е. $A \subseteq B$, или не все элементы A принадлежат B.

В случае $A \subseteq B$ возможно, что и все элементы B принадлежат A и тогда $A = B$, или же не все элементы B принадлежат A и тогда $A \subset B$.

В случае, когда не все элементы A принадлежат B, возможно, что все элементы B принадлежат A и тогда $B \subseteq A$, или же не все элементы B принадлежат A. В последнем случае, т. е. когда ни одно из множеств A и B не является подмножеством другого и их пересечение непусто, эти множества называются *пересекающимися*.

Проведенное исследование может быть записано в виде следующей наглядной схемы:



Упражиеиия

27. Изобразить с помощью диаграммы отиошеиия между миожествами целых, рациоиальиых, положительиых и веществеииых чисел; между миожествами иатуральиых, отрицательиых, рациоиальных и веществеииых чисел.

28. Изобразить с помощью диаграммы отношения между множествами ромбов, прямоугольников и параллелограммов; между множествами многогранников, призм, параллелепипедов, правильных призм и кубов.

29. В каком отношении находятся множества:

а) $\underset{x \in N}{M}[x<5]$ и $\underset{x \in N}{M}[x \leqslant 5]$; б) $\underset{x \in N}{M}[x<5]$ и $\underset{x \in C}{M}[x<5]$;
в) $\underset{x \in N}{M}[x<5]$ и $\underset{x \in N}{M}[x>5]$; г) $\underset{x \in N}{M}[|x| \leqslant 2]$ и $\underset{x \in C}{M}[|x|<2]$;
д) $\underset{x \in C}{M}[|x|=2]$ и $\underset{x \in R}{M}[|x|=2]$?

30. В каком отношении находятся каждые два из множеств: $A_1=\underset{x \in N}{M}[|x|<3]$; $A_2=\underset{x \in C}{M}[|x|<3]$; $A_3=\underset{x \in R}{M}[|x|<3]$; $A_4=\underset{x \in D}{M}[|x|<3]$? Изобразить эти множества с помощью точек прямой.

31. В каком отношении находятся множества $O_1=[2,\ 3]$ и $O_2=[3,\ 4]$? Определить пересечение и объединение этих множеств, изобразить их на числовой прямой.

32. В каком отношении находятся множества $O_1=]\,2,\ 5\,[$ и $O_2=[2,\ 5]$? Определить пересечение и объединение этих множеств, изобразить их на числовой прямой.

33. В каком отношении находятся множества $O_1=]\,2,\ +\infty\,[$ и $O_2=[\,2,\ +\infty\,[$? Определить пересечение и объединение этих множеств, изобразить их на числовой прямой.

3.5. Разность двух множеств. Пусть A — множество равнобедренных треугольников, а B — множество прямоугольных треугольников. Тогда множество равнобедренных непрямоугольных треугольников состоит из всех тех и только тех элементов из A, которые не принадлежат B. Это множество называется *разностью* между множеством A и множеством B.

Аналогично, множество прямоугольных неравнобедренных треугольников состоит из всех тех и только тех элементов из B, которые не принадлежат A, и является разностью между множеством B и множеством A.

В общем виде разность определяется следующим образом.

Определение. *Разностью между множеством А и множеством В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В.*

Это множество обозначается символом $A \setminus B$.

Таким образом (рис. 8),

$$A \setminus B \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\,[x \in A \text{ и } x \overline{\in} B].$$

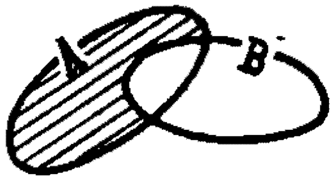


Рис. 8

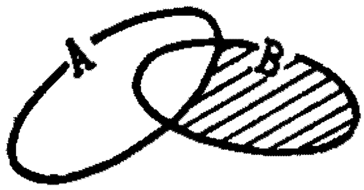


Рис. 9

Аналогично (рис. 9),

$$B \setminus A \underset{Df}{=} \underset{x}{M}\,[x \in B \text{ и } x \overline{\in} A].$$

Как видно, вообще $A \setminus B \neq B \setminus A$. Нетрудно заметить, что лишь в одном случае $A \setminus B = B \setminus A$: если $A = B$, то $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$.

Если $A \subseteq M$, то разность $M \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества M.

Очень часто изучаемые в математике множества A, B, C, ... (чисел, точек, фигур, функций и т. д.)

являются подмножествами некоторого множества M, принимаемого (в данном рассмотрении) за *основное*, или *универсальное*.

Например, если мы рассматриваем различные виды многоугольников (A — множество треугольников, B — множество четырехугольников и т. д.), то в качестве универсального множества M можно выбрать множество всех многоугольников.

Под $\overline{A}$, $\overline{B}$, ... будем понимать дополнения множеств A, B, ... соответственно до выбранного универсального множества.

В нашем примере $\overline{A}$ — множество нетреугольных многоугольников, $\overline{B}$ — множество нечетырехугольных многоугольников.

При рассмотрении различных отрезков (открытых или замкнутых) в качестве универсального множества чисел подразумевается множество D всех вещественных чисел.

Совершенно очевидно, что для всякого множества A: $A \cup \overline{A} = M$ (M — универсальное множество) и $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Понимая под «x» переменную для любого элемента из универсального множества M, можно определение дополнения записать следующим образом (рис. 10):

$$\overline{A} \underset{Df.\,x}{=} M\,[x \overline{\in} A].$$

Упражнения

34. Чему равно дополнение пустого множества; универсального множества?

35. Известно, что $A \subseteq B$. В каком отношении находятся множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

36. Чему равно дополнение дополнения множества A: $\overline{\overline{A}} = ?$

37. Пусть D — универсальное множество. Определить дополнения следующих множеств:

а) $]-\infty, 2[$; б) $]-\infty, 2]$; в) C; г) R; д) $[1, 5]$; е) $]1,5]$; ж) $]3, +\infty[$; з) $[3, +\infty[$.

38. Записать множество всех положительных чисел с помощью характеристического свойства и в виде отрезка (универсальное множество — D). Записать дополнение этого множества. Записать множество неотрицательных чисел с помощью характеристического свойства и в виде отрезка. Записать дополнение этого множества. Изобразить эти множества на числовой прямой.

39. Доказать, что для любых двух множеств A, B:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

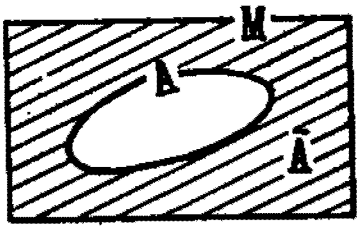


Рис. 10

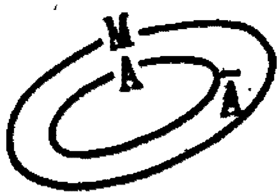


Рис. 11

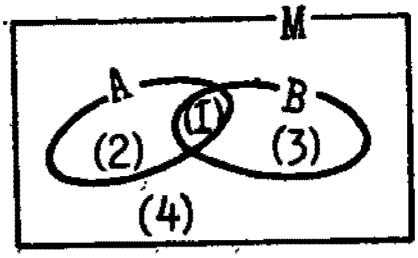


Рис. 12

(дополнение объединения двух множеств равно пересечению дополнений этих множеств);

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(дополнение пересечения двух множеств равно объединению дополнений этих множеств).

Иллюстрировать эти равенства (законы *де Моргана**) с помощью диаграмм.

40. Пусть универсальное множество — множество студентов первого курса. Назвать дополнения следующих множеств:

---

* По имени английского математика и логика Августа де Моргана (1806 — 1871).

а) множества отличников; б) множества спортсменов; в) множества студентов, являющихся отличниками **и** спортсменами; г) множества студентов, являющихся отличниками **или** спортсменами (хотя бы одно из двух); д) множества студентов, не являющихся ни отличниками, ни спортсменами.

§ 4. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ

Операции объединения и пересечения множеств являются основой для понятия разбиения множества на классы.

4.1. Разбиение множества на классы с помощью одного свойства. Пусть универсальное множество M — множество всех треугольников. С помощью свойства «быть прямоугольным» (иметь прямой угол) мы выделяем подмножество A прямоугольных треугольников (т. е. элементов M, обладающих этим свойством) и подмножество $\overline{A}$ непрямоугольных треугольников (т. е. элементов M, не обладающих этим свойством).

Эти два подмножества универсального множества M непересекающиеся ($A \cap \overline{A} = \varnothing$), и их объединение составляет множество M ($A \cup \overline{A} = M$).

Говорят, что свойство «быть прямоугольным» определяет разбиение множества M на два класса, A и $\overline{A}$ (рис. 11).

4.2. Разбиение множества на классы с помощью двух свойств. Пусть, как и выше, универсальное множество M — множество всех треугольников. С помощью свойства «быть прямоугольным» мы выделяем подмножества A прямоугольных и $\overline{A}$ непрямоугольных треугольников, с помощью свойства «быть равнобедренным» мы выделяем подмножества B равнобедренных и $\overline{B}$ неравнобедренных треугольников (рис. 12).

Указанные два свойства определяют разбиение множества M на четыре попарно непересекающиеся подмножества (на четыре класса): (1) — $A \cap B$; (2) — $A \cap \overline{B}$; (3) — $\overline{A} \cap B$; (4) — $\overline{A} \cap \overline{B}$.

На диаграмме (рис. 12) видно, что эти четыре множества попарно непересекающиеся и их объединение образует множество M. Это можно также легко доказать. В качестве примера докажем, что множества (1) и (2) — непересекающиеся:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) &= (A \cap A) \cap (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing .\end{aligned}$$

В частных случаях некоторые из множеств (1) — (4) могут оказаться пустыми. Например, если M — множество всех треугольников, A — множество прямоугольных треугольников, B — множество правильных треугольников, то: $A \cap B = \varnothing$; $A \cap \overline{B} = A$; $\overline{A} \cap B = B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$ — множество непрямоугольных неправильных треугольников.

4.3. Разбиение множества на классы с помощью трех свойств. Пусть универсальное множество M — множество студентов первого курса. С помощью свойств «быть отличником», «быть спортсменом», «быть участником художественной самодеятельности» выделяем под-

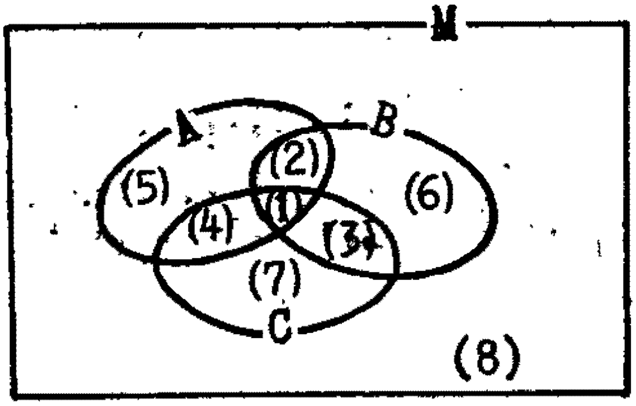


Рис. 13

множества: A — отличников, $\overline{A}$ — неотличников, B — спортсменов, $\overline{B}$ — неспортсменов, C — участников художественной самодеятельности и $\overline{C}$ — студентов, не являющихся участниками художественной самодеятельности.

С помощью этих трех свойств осуществляется разбиение множества M на 8 попарно непересекающихся подмножеств (классов) (рис. 13):

(1) — $A \cap B \cap C$ — множество студентов, являющихся отличниками, спортсменами и участниками художественной самодеятельности;

(2) — $A \cap B \cap \overline{C}$ — множество студентов, являющихся отличниками и спортсменами, но не участниками художественной самодеятельности;

(3) — $\overline{A} \cap B \cap C$ — множество студентов, являющихся спортсменами и участниками художественной самодеятельности, но не являющихся отличниками;

(4) — $A \cap \overline{B} \cap C$ — множество студентов, являющихся отличниками и участниками художественной самодеятельности, но не спортсменами;

(5) — $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ — множество студентов, являющихся **только** отличниками, т. е. отличниками, но не спортсменами и не участниками художественной самодеятельности;

(6) — $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ — множество студентов, являющихся **только** спортсменами;

(7) — $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ — множество студентов, являющихся **только** участниками художественной самодеятельности;

(8) — $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ — множество студентов, не являющихся ни отличниками, ни спортсменами, ни участниками художественной самодеятельности.

Разумеется, некоторые из множеств (1) — (8) могут оказаться пустыми.

4.4. Разбиение множества на классы. Разбиение некоторого множества M на попарно непересекающиеся части называется также *разбиением множества на классы*, а попарно непересекающиеся подмножества, объединение которых составляет данное множество M, называются также *классами*.

Таким образом, разбиение множества M на классы K_1, K_2, ..., K_n определяется следующими двумя условиями:

1) $K_i \cap K_j = \varnothing$ для всяких i, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = M$.

Как видно из предыдущих примеров (4.1, 4.2, 4.3), с помощью одного свойства осуществляется разбиение множества вообще на 2 класса, с помощью двух свойств — на 4 класса, с помощью трех свойств — на 8 классов; можно предположить, что с помощью n свойств осуществляется разбиение множества, вообще, на 2^n классов (это легко доказать индукцией по n). Разумеется, некоторые из этих классов в частных случаях могут оказаться пустыми.

Разбиение множества на классы находит широкое применение в математике (гл. 4).

Упражнения

41. Доказать, что множества $A \cap B \cap C$ и $A \cap \overline{B} \cap C$ — непересекающиеся.

42. Доказать, что объединение множеств $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ образует универсальное множество M, подмножествами которого являются A и B.

43. Записать и назвать классы, на которые разбивается множество параллелограммов с помощью свойств «быть равносторонним» и «быть прямоугольным». Изобразить отношения между множествами на диаграмме.

44. Изобразить на диаграмме, записать и назвать классы, на которые разбивается множество вещественных чисел с помощью свойств: «быть целым», «быть положительным» и «быть рациональным».

45. Из 100 студентов первого курса: 6 отличников, 20 спортсменов, 25 участников художественной самодеятельности: 3 являются отличниками и спортсменами, 6 — спортсменами и участниками художественной самодеятельности, 2 — отличниками и участниками художественной самодеятельности, а 1 студент является отличником, спортсменом и участником художественной самодеятельности. Сколько студентов не являются ни отличниками, ни спортсменами, ни участниками художественной самодеятельности? Сколько студентов являются **только** отличниками? Сколько студентов являются отличниками **или** спортсменами (хотя бы одно из двух)? Сколько студентов являются спортсменами **или** участниками художественной самодеятельности (хотя бы одно из двух)? Сколько студентов являются или отличниками, **или** спортсменами (**только** одно из двух)?

Указание. Задачи такого типа легко решаются с использованием диаграммы Венна (рис. 13). Достаточно вписать число элементов каждого из классов разбиения и получаем наглядную картину, позволяющую ответить на все вопросы задачи.

46. При обследовании 100 студентов были получены следующие данные о числе студентов, изучающих различные языки: только немецкий — 18; немецкий, но не испанский — 23; немецкий и французский — 8; немецкий — 26; французский — 48; французский и испанский — 8; никакого языка — 24.

а) Сколько студентов изучают испанский язык? б) Сколько студентов изучают немецкий и испанский языки, но не французский?

47. В классе 25 учащихся. Из них 13 лыжников, 8 пловцов и 17 велосипедистов. Причем каждый спортсмен занимается только

двумя видами спорта и учится на «3» или на «4». В классе 6 круглых отличников.

а) Сколько в классе спортсменов? б) Сколько в классе неуспевающих?

48. 80 человек знают хотя бы один из трех языков, причем 10 знают только английский, 14 — только немецкий, 20 — только французский, а число знающих все три языка на 2 меньше числа знающих только немецкий и французский, на 4 меньше числа знающих только английский и французский и на 6 меньше числа знающих только английский и немецкий. Сколько человек знают:

а) все три языка? б) французский и немецкий? в) французский или немецкий (хотя бы один из них)? г) или французский, или немецкий (только один из них)?

49. На какие классы точек разбивается плоскость (множество точек плоскости):

а) прямой линией? б) двумя параллельными прямыми? в) двумя пересекающимися прямыми? г) тремя попарно пересекающимися прямыми?

(Две точки плоскости считаются принадлежащими одному классу точек, если отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается данной прямой (ни одной из данных прямых), и считаются принадлежащими различным классам точек, если этот отрезок пересекается данной прямой.)

50. На какие классы точек разбивается пространство (множество точек пространства):

а) плоскостью? б) двумя параллельными плоскостями? в) двумя пересекающимися плоскостями?

§ 5. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

5.1. Пара. Под *парой* будем всегда понимать *упорядоченную пару* элементов, т. е. два элемента, расположенных в определенном порядке. Элемент, занимающий первое место, называется *первым* элементом (первым компонентом, первой координатой) пары. Элемент, занимающий второе место, называется *вторым* элементом (вторым компонентом, второй координатой) пары. Для обозначения пары мы применим круглые скобки. Символ (a, b) обозначает пару с первым элементом a и вторым элементом b.

Две пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются равными (совпадающими), если и только если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Это обозначается обычным знаком равенства:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2).$$

Элементы пары могут оказаться и равными, т. е. мы рассматриваем и пары типа (a, a), но в этом случае, разумеется, не имеет смысла говорить о порядке элементов.

Если $a \neq b$, то исходя из определения равенства пар получаем

$$(a, b) \neq (b, a),$$

т. е. две пары, отличающиеся только порядком элементов, различны (в то время как для двухэлементных множеств имеем $\{a, b\} = \{b, a\}$).

Если рассматривать пары (x, y) вещественных чисел, т. е. такие, что $x \in \boldsymbol{D}$ и $y \in \boldsymbol{D}$, то каждой такой паре соответствует *точно одна* (одна и только одна) точка плоскости при заданной системе координат и, обратно, каждой точке плоскости соответствует точно одна пара вещественных чисел. Поэтому в математике часто называют пару вещественных чисел «точкой плоскости» или просто «точкой» (подразумевая «точку плоскости»).

Совершенно очевидно, что если $x \in \boldsymbol{D}$, $y \in \boldsymbol{D}$ и $x \neq y$, то (x, y) и (y, x) — различные точки.

Упражнения

51. Если $x \in \boldsymbol{D}$ и $y \in \boldsymbol{D}$, то точки (x, y) и (y, x) симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Доказать.

52. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5\}$. Составить множество всевозможных пар, первые элементы которых при-

надлежат множеству A, а вторые — множеству B. Изобразить на плоскости полученное множество точек. Составить множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат множеству B, а вторые — множеству A. Изобразить полученное множество точек на плоскости. Совпадают ли полученные два множества точек? Чему равно пересечение этих множеств?

53. Даны два множества: $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 1, 2\}$. Составить множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат множеству A, а вторые — множеству B. Изобразить на плоскости полученное множество точек. Составить множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат множеству B, а вторые — множеству A. Изобразить полученное множество точек на плоскости. В каком отношении находятся полученные два множества точек?

54. Дано множество $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Составить множество всевозможных пар, элементы которых принадлежат множеству A (или множествам A и $B=A$).

5.2. Произведение двух множеств. Рассмотрим таблицы «открытых» (1) и «закрытых» (2) слогов, которые изучаются в первом классе школы.

Таблица 1

	а	е	о	у
м	ма	ме	мо	му
н	на	не	но	ну
п	па	пе	по	пу
р	ра	ре	ро	ру

Таблица 2

	м	н	п	р
а	ам	ан	ап	ар
е	ем	ен	еп	ер
о	ом	он	оп	ор
у	ум	ун	уп	ур

По существу мы имеем здесь два множества: множество согласных С = {м, н, п, р} и множество гласных Г = {а, е, о, у}. В табл. 1 выписаны всевозможные пары (если слог отождествить с парой, например, слог ма — с парой (м, а)), первые элементы которых принадлежат множеству С, а вторые — множеству Г. В табл. 2 выписаны всевозможные пары, первые элементы которых принадлежат множеству Г, а вторые — множеству С.

В первом случае (табл. 1) множество пар называется произведением множества С на множество Г (С × Г), во втором (табл. 2) — произведением множества Г на множество С (Г × С).

Дадим общее определение произведения двух множеств.

Определение. *Произведением* $A \times B$ *множества* A *на множество* B *называется множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат* A, *а вторые* — B, т. е.

$$A \times B \underset{Df}{=} \underset{(x,\, y)}{M} [x \in A \text{ и } y \in B].$$

Множество $A \times B$ распознается тем, что его элементами являются пары элементов двух других множеств (A и B).

Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{n, p\}$, тогда

$$A \times B = \{(a, n), (a, p), (b, n), (b, p), (c, n), (c, p)\},$$

а

$$B \times A = \{(n, a), (p, a), (n, b), (p, b), (n, c), (p, c)\}.$$

Как видно, $A \times B \neq B \times A$ (операция образования произведения двух множеств некоммутативна).

Если $B = A$, то $A \times B = A \times A = \underset{(x,\ y)}{M}[x \in A$ и $y \in A]$, т. е. $A \times A$ — множество всевозможных пар элементов из множества A. Это множество пар обозначается также символом «A^2».

Запись $x,\ y \in A$ будем понимать в смысле $x \in A$ и $y \in A$.

Запись $(x,\ y) \in A^2$ означает: «пара $(x,\ y)$ принадлежит множеству пар A^2».

Множество D^2 всевозможных пар вещественных чисел (элементов из D) называют также множеством *точек плоскости*, или просто *плоскостью* (так как введением системы координат с каждой точкой плоскости сопоставляется точно одна пара вещественных чисел и, обратно, с каждой парой вещественных чисел сопоставляется точно одна точка плоскости).

Упражнения

55. В приведенном выше примере множество A содержит 3 элемента, множество B — 2 элемента, а множество $A \times B$ — 6 элементов. Пусть $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ и $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k\}$. Доказать, что множество $A \times B$ содержит $n \times k$ элементов. Сколько элементов содержит множество A^2, если A — n-элементное множество?

56. Пусть $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Составить множество A^2. В каком отношении находятся множества A^2 и D^2? Изобразить A^2 как множество точек.

57. Указать необходимое и достаточное условие для того, чтобы

$$A \times B = B \times A.$$

58. Изобразить следующие множества точек:

а) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in N^2$ и $y = x]$; б) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y = x]$;

в) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y < x]$; г) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y \leqslant x]$;

д) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y > x]$; е) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y \geqslant x]$;

ж) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1]$;

з) $\underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $(0 \leqslant x \leqslant 1$ или $0 \leqslant y \leqslant 1)]$.

59. Доказать, что для любых множеств A, B, C:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

и

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

60. Изобразить множества точек:

$$E_1 = \underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2 \text{ и } x + y = 10]$$

и

$$E_2 = \underset{(x;\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2 \text{ и } x - y = 2].$$

Что представляют собой множества $E_1 \cup E_2$ и $E_1 \cap E_2$?

5.3. n-ка. Естественным обобщением понятия пары является тройка, четверка, ... и вообще n-ка (система, набор из n) элементов.

Под n-кой будем всегда понимать *упорядоченную* систему из n элементов, которую мы обозначим символом $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ (a_i занимает i-е место). Некоторые из a_i (или даже все) могут оказаться равными.

5.4. Произведение n множеств. Определенное выше произведение двух множеств (5.2) допускает распространение на большее число множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \underset{Df}{=} \underset{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{M}[x_1 \in A_1 \text{ и } x_2 \in A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \in A_n],$$

т. е. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ — множество всевозможных n-ок, первый элемент которых принадлежит A_1, второй — A_2, ..., n-й — A_n.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n = \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{M} [x_1 \in A \text{ и } x_2 \in A \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \in A],$$

т. е. A^n — множество всевозможных n-ок элементов из A.

При $n = 2$, $A^n = A^2$ — множество всевозможных пар элементов из A; при $n = 3$, $A^n = A^3$ — множество всевозможных троек элементов из A и т. д.

Упражнения

61. Доказать равенство

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Чему равно каждое из этих множеств?

62. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ и $C = \{5, 6\}$. Составить множества:

а) $A \times B \times C$; б) $B \times A \times C$; в) $B \times C \times A$; г) $C \times B \times A$.

63. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$. Составить множество $A \times B$. Изобразить $A \times B$ как множество точек. Выделить из множества $A \times B$ следующие подмножества:

а) $\underset{(x, y)}{M} [(x, y) \in A \times B$ и $x = y]$; б) $\underset{(x, y)}{M} [(x, y) \in A \times B$ и $x < y]$;
в) $\underset{(x, y)}{M} [(x, y) \in A \times B$ и $x \leqslant y]$

и изобразить их в виде множеств точек на плоскости.

§ 6. ОТОБРАЖЕНИЯ

6.1. Отображение множества в множество. Мы приступаем здесь к изложению современной, теоретико-множественной трактовки одного из центральных понятий математики, известного из школьного курса, понятия функции.

Начнем со следующего примера. Допустим, что дядя из города привез своим племянникам в деревню подарки и пусть $A = \{a, b, c\}$ — множество подарков, а $B = \{m,$

n, $p\}$ — множество племянников. Очевидно, что можно по-разному распределить подарки среди племянников. На рис. 14, *а*, *б*, *в* изображены некоторые из таких распределений.

Как видно, не исключается и случай, когда дядя дает одному племяннику два подарка, другому — один, а третьему, которого он не любит, — ни одного (рис. 14, *в*).

В каждом из изображенных на рис. 14 распределений подарков устанавливается *соответствие*, сопоставляющее

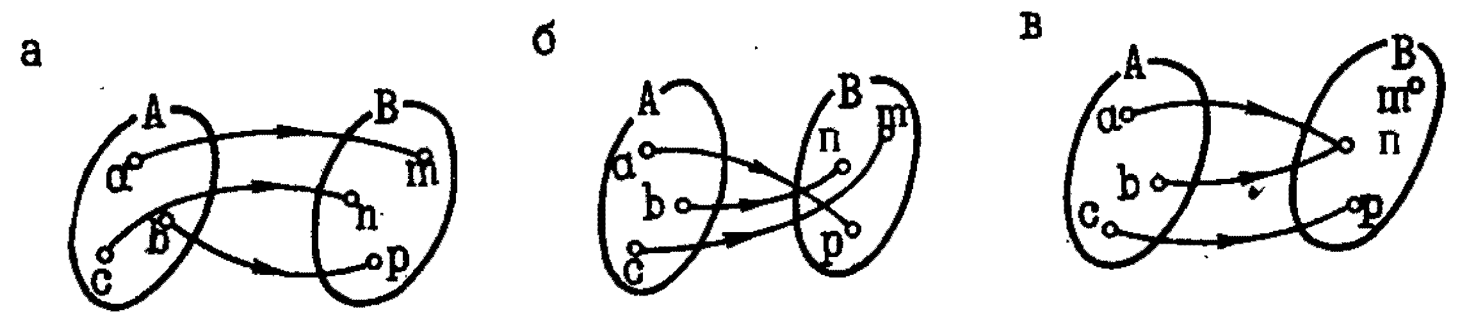


Рис. 14

с каждым элементом из множества A точно один элемент из множества B. Такое соответствие называется *отображением множества A в множество B или функцией с областью определения A, принимающей значения из B.*

В приведенном выше примере A и B — конечные множества. Рассмотрим другой пример, в котором эти множества бесконечны. Пусть $A = N$, т. е. множество всех натуральных чисел, а B — множество чисел, обратных натуральным. С каждым натуральным числом x сопоставим ему обратное число $\frac{1}{x}$. Мы получаем отображение множества A в множество B, или функцию с областью определения N, принимающую значения из B.

Множества A и B могут и не быть различными. Например, пусть $A = B = \boldsymbol{D}$ и каждому x из $\boldsymbol{D}$ поставим в соответствие x^2, также принадлежащий $\boldsymbol{D}$. Мы получили отображение множества $\boldsymbol{D}$ *в себя* (т. е. множества $\boldsymbol{D}$ в множество $\boldsymbol{D}$).

Дадим общее определение отображения множества A в множество B.

Определение. *Соответствие f, сопоставляющее с каждым элементом некоторого множества A* ***точно один*** *элемент множества B (которое может, в частности, совпадать с A), называется отображением множества A в множество B или функцией с областью определения A, принимающей значения из B и обозначается* $A \xrightarrow{f} B$ или $x \to f(x)$, $x \in A$, $f(x) \in B$, где $f(x)$ — *значение функции*, или *образ* x в отображении f. Элементы множества A называются *значениями аргумента.*

Если $B = A$, мы говорим, что f — отображение множества A в самое себя.

Множество образов всех элементов A в отображении f называется *образом* множества A в этом отображении и обозначается символом $f(A)$. Очевидно, что $f(A) \subseteq B$.

6.2. График отображения (функции). Нетрудно заметить, что функция f, определенная на множестве A (с областью определения A) и принимающая значения из B (отображение $A \xrightarrow{f} B$), порождает множество пар (подмножество $A \times B$) такое, что первый элемент каждой пары принадлежит A, а второй принадлежит B и является образом первого в данном отображении.

Это множество пар, или точек, называют *графиком* отображения, или функции f.

Мы обозначим график функции f символом Γ_f. Таким образом,

$$\Gamma_f = \underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in A \times B \text{ и } y = f(x)].$$

Это множество пар удовлетворяет следующим условиям:

1. Все элементы A являются первыми элементами пар, так как каждому элементу A ставится в соответствие элемент из B.

2. Не существует различных пар с равными первыми элементами, так как каждому элементу A ставится в соответствие **только один** элемент из B.

Эти два условия можно сформулировать объединенно: каждый элемент из A является первым элементом **точно одной** пары элемента Γ_f.

6.3. Виды отображений. Рассмотрим три важных вида отображения $A \xrightarrow{f} B$.

1) Если каждый элемент множества B является образом **хотя бы одного** элемента из A, т е. $f(A) = B$, отображение называется *сюръективным (сюръекцией)* или *отображением множества A на множество B* (рис. 15). Таким образом, отображение **«на»** является частным случаем отображения **«в»** (множество B).

2) Если каждый элемент множества B является образом **не более одного** элемента из A, отображение называется *инъективным (инъекцией)* (рис. 16).

3) Третий вид отображения, играющий особую роль в математике, характеризуется выполнением условий 1 и 2, т. е. каждый элемент множества B является образом **точно одного** элемента из A. Такое отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным, называется *биективным отображением (биекцией)* или *взаимно однозначным соответствием* (рис. 17).

6.4. Обратное отображение (обратная функция). С биективным отображением связано понятие *обратного* отображения, или *обратной* функции.

Если $A \xrightarrow{f} B$ — биективное отображение, то существует (также биективное) отображение $B \xrightarrow{f^{-1}} A$, называемое *об-*

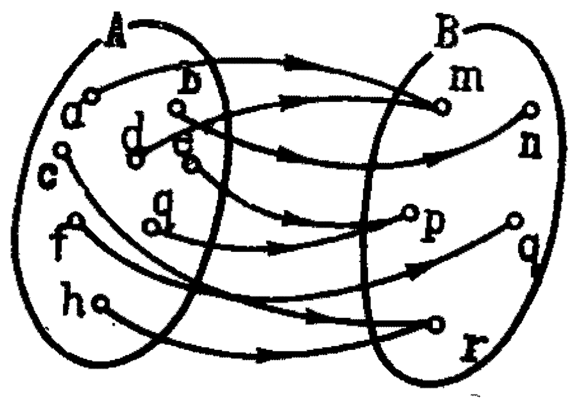


Рис. 15

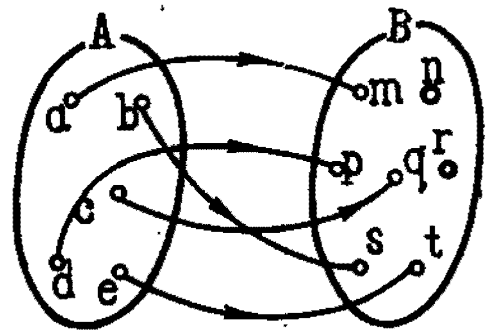


Рис. 16

ратным по отношению к f и сопоставляющее с каждым элементом из B точно один элемент из A так, что если y — образ x в отображении f, то x — образ y в отображении f^{-1}, т. е. если $f(x) = y$ $(x \in A,\ y \in B)$, то $f^{-1}(y) = x$.

Из этого определения обратной функции следует, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для всякого x из A, т. е. последовательное применение к любому элементу из A отображений f и f^{-1} возвращает нас к этому же элементу.

Нетрудно заметить, что если f^{-1} — отображение, обратное f, то и f — отображение, обратное f^{-1}.

Чтобы из изображения f (рис. 17) получить изображение обратной функции f^{-1}, достаточно повернуть все стрелки в противоположную сторону (рис. 18).

6.5. Эквивалентные множества. Если существует (хотя бы одно) биективное отображение $A \xrightarrow{f} B$, то говорят, что множество A *эквивалентно* множеству B.

Это обозначается символом $A \sim B$.

Отношение «$\sim$» обладает следующими свойствами:

1. Оно *рефлексивно*, т. е. $A \sim A$ для всякого множества A (биективное отображение $A \xrightarrow{f} A$ можно построить,

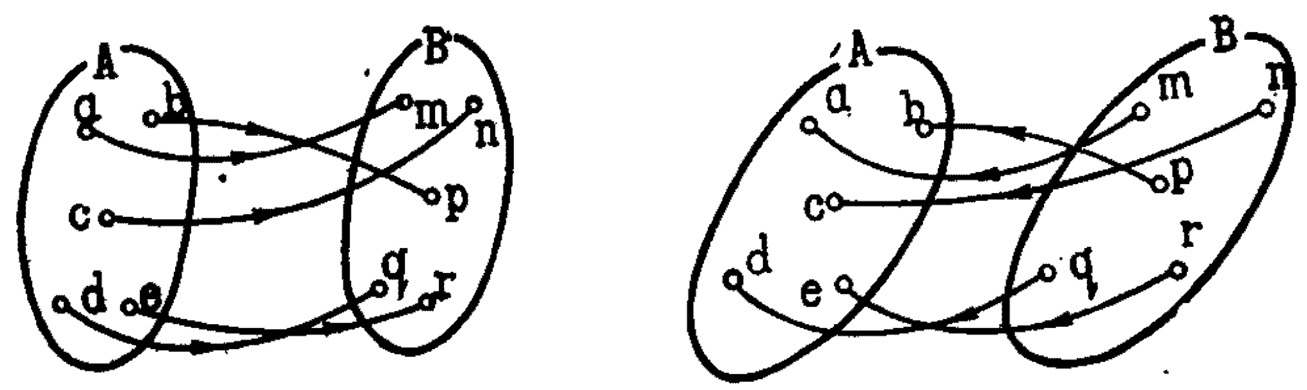


Рис. 17

Рис. 18

сопоставляя с каждым элементом a из A этот же самый элемент).

2. *Симметрично*, т. е. для любых множеств A и B, если $A \sim B$, то $B \sim A$ (если существует биективное отображение $A \xrightarrow{f} B$, то существует обратное биективное отображение $B \xrightarrow{f^{-1}} A$); в силу симметричности вместо «множество A эквивалентно множеству B» говорят обычно «множества A и B эквивалентны».

3. *Транзитивно*, т. е. для любых множеств A, B, C, если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Действительно, если $A \sim B$, то существует биективное отображение $A \xrightarrow{f_1} B$ и если $B \sim C$, то существует биективное отображение $B \xrightarrow{f_2} C$. Построим отображение $A \xrightarrow{f} C$ следующим образом: с каждым элементом x из A сопоставим элемент z из C так, что если $y = f_1(x)$, то $z = f_2(y)$. Это означает, что $f(x) = f_2(f_1(x))$. Отображение f называется *суперпозицией* (или *произведением*) отображений f_1 и f_2 и обозначается

$$f = f_2 \circ f_1.$$

Совершенно очевидно, что f — биективное отображение. Следовательно, $A \sim C$.

Если множество A — конечное, то и эквивалентное ему множество B также конечное. Более того, эти множества *равночисленные*, т. е. имеют одно и то же число элементов. С другой стороны, каждое натуральное число выражает численность не одного какого-нибудь определенного множества, а целого класса попарно эквивалентных множеств. Так, число 5 выражает общее свойство (численность) всех множеств, эквивалентных, например множеству пальцев человеческой руки.

Если множество A — бесконечное, то и эквивалентное ему множество B — бесконечное. Бесконечные эквивалентные множества называются также *равномощными* (имеющими одинаковую *мощность*; понятие мощность представляет собой обобщение понятия численности на случай бесконечных множеств).

С равномощными множествами связаны некоторые, на первый взгляд парадоксальные, явления. Приведем пример.

Пусть $f: x \to 2x$, $x \in N$, $2x \in B$, где B — множество положительных четных чисел. Так как f — биективное отображение, то множество N равномощно множеству B положительных четных чисел, которое строго включается в N, являясь его собственной частью.

Мы получили, что собственная часть множества эквивалентна всему множеству, что невозможно в области конечных множеств. Однако о бесконечных множествах (не только N), встречающихся в математике, доказывается, что они равномощны (эквивалентны) некоторой своей собственной части.

6.6. Числовые функции. В определении отображения $A \xrightarrow{f} B$, или функции с областью определения A и принимающей значения из B, ничего не было указано относительно природы элементов множеств A и B. Они могут быть предметами самой различной природы.

Если B — числовое множество, т. е. значения функции f — числа, то функция называется *числовой*. Если и множество A — числовое множество, то f — числовая функция *числового аргумента*.

Часто числовая функция числового аргумента задается указанием области определения и формулы (уравнения), позволяющей для любого значения аргумента вычислить соответствующее значение функции. Например, указанием области определения $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и формулы $y = 2x + 3$ (при условии, что x — переменная для значений аргумента, а y — переменная для значений функции) определяется функция $f: x \to 2x + 3$, $x \in A$.

Ввиду того что A — конечное множество, функция f может быть задана и таблицей:

$$f = \begin{bmatrix} 1 \to 5 \\ 2 \to 7 \\ 3 \to 9 \\ 4 \to 11 \end{bmatrix}$$ или

x	$f(x)$
1	5
2	7
3	9
4	11

а график этой функции представляет собой множество из четырех точек (рис. 19): $\Gamma = \underset{(x,\ y)}{M}[x \in A \text{ и } y = 2x + 3] = \{(1,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 9),\ (4,\ 11)\}$.

Вообще, важную роль в математике играют функции, определенные на множестве D всех вещественных чисел или на какой-нибудь его части и принимающие вещественные значения.

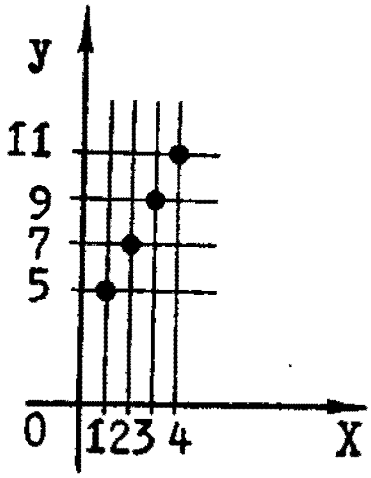


Рис. 19

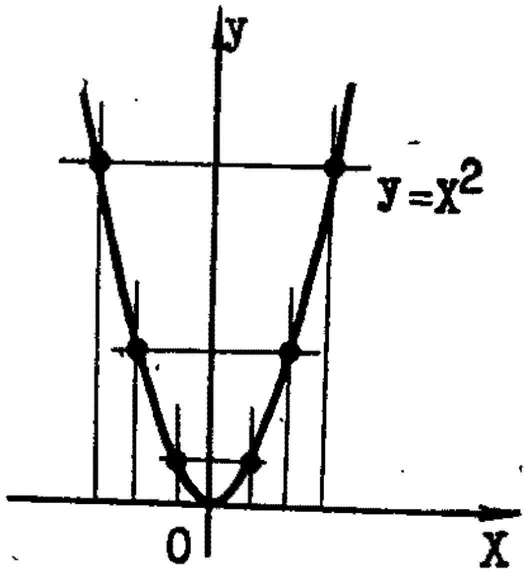


Рис. 20

Для функции типа $D \xrightarrow{f} D$ график $\Gamma_f = \underset{(x,\ y)}{M}[(x,\ y) \in D^2$ и $y = f(x)]$ представляет собой подмножество точек плоскости, характеризуемое тем, что на любой прямой, перпендикулярной оси абсцисс OX, лежит точно одна точка этого множества.

Например, если $f: x \to x^2$, $x \in \boldsymbol{D}$, то $\Gamma_f = \underset{(x,\, y)}{M}[(x, y) \in \boldsymbol{D}^2$ и $y = x^2]$ представляет собой параболу (множество точек, заполняющих параболу (рис. 20)), имеющую с любым перпендикуляром к оси OX точно одну общую точку.

Упражнения

64. Построить всевозможные отображения множества $A = \{a, b\}$ в множество $B = \{m, n\}$. Какие из них являются отображениями на множество B?

65. Построить всевозможные отображения типа $A \xrightarrow{f} A$ (т. е. множества A в самое себя), где $A = \{a, b\}$. Какие из них являются отображениями на множество A?

66. Пусть $A = \{a, b\}$. Составить множество A^2. Построить всевозможные отображения типа $A^2 \xrightarrow{f} A$ (сопоставляющие с каждой парой элементов из A элемент этого же множества A — *двухместные* функции, или функции *двух аргументов*:

$$f: (x, y) \to f(x, y), \ (x, y) \in A^2, \ f(x, y) \in A).$$

Сколько всего отображений такого типа?

67. Доказать, что если A — n-элементное множество, то имеется всего 2^{2^n} функций типа $A^2 \xrightarrow{f} A$.

68. Выяснить, являются ли записанные ниже отображения биективными:

а) $f_1: x \to y = x^3$, $x \in \boldsymbol{D}$, $y \in \boldsymbol{D}$;
б) $f_2: x \to y = 2^x$, $x \in \boldsymbol{D}$, $y \in \boldsymbol{D}$;
в) $f_3: x \to y = 2^x$, $x \in \boldsymbol{D}$, $y \in]0, +\infty[$;
г) $f_4: x \to y = \lg x$, $x \in]0, +\infty[$, $y \in \boldsymbol{D}$;
д) $f_5: x \to y = \sin x$, $x \in \boldsymbol{D}$, $y \in [-1, 1]$;
е) $f_6: x \to y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$.

69. Записать обратные для следующих функций:

а) $f_1: x \to y = 3x - 5$, $x \in \boldsymbol{D}$;
б) $f_2: x \to y = 2^x$, $x \in \boldsymbol{D}$;
в) $f_3: x \to y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $f_4: x \to y = \cos x, \ x \in [0; \ \pi]$;

д) $f_5: x \to y = \operatorname{tg} x, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

70. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Построить всевозможные отображения множества A на множество A. Определить произведение (суперпозицию) любых двух из этих отображений и записать результаты в виде прямоугольной таблицы.

71. Построить графики следующих функций:

а) $f_1: x \to y = x^2, \ x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; б) $f_2: x \to y = x^2, \ x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; в) $f_3: x \to y = x^2, \ x \in \boldsymbol{N}$; г) $f_4: x \to y = x^2, \ x \in \boldsymbol{C}$; д) $f_5: x \to y = x^2, \ x \in \boldsymbol{D}$.

72. Построить следующие графики:

а) $\Gamma_1 = \underset{(x,\ y)}{M} [x \in \boldsymbol{N}$ и $y = |x|]$; б) $\Gamma_2 = \underset{(x,\ y)}{M} [x \in \boldsymbol{C}$ и $y = |x|]$; в) $\Gamma_3 = \underset{(x,\ y)}{M} [x \in \boldsymbol{D}$ и $y = |x|]$;

73. Доказать, что множество всех натуральных чисел эквивалентно (равномощно):

а) множеству положительных нечетных чисел; б) множеству чисел, являющихся полными квадратами.

Глава 2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Всякая математическая теория, как, впрочем, и всякая теория вообще, представляет собой множество предложений.

Над предложениями производятся различные «операции», в результате которых снова получаются предложения. Из одних предложений «выводятся» другие, являющиеся «логическими следствиями» первых.

В этой и следующей главах мы займемся изучением (с определенной, нужной нам, точки зрения) предложений, операций над ними и отношения выводимости, или логического следования, одних предложений из других.

§ 7. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Предложение. Под *предложением* мы будем понимать то, что обычно понимают в грамматике любого естественного языка, т. е. языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

Предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно), назовем *высказыванием*.

Примерами высказывания являются:

(а) $1 < 3$;

(б) $5 < 3$;

(в) $2 \times 2 = 4$;

(г) $2 \times 2 = 5$;

(д) Город Минск — столица БССР;

(е) Город Могилев — столица БССР.

Предложения (а), (в), (д) — *истинные* высказывания; предложения (б), (г), (е) — *ложные* высказывания.

Вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями, так как о них не имеет смысла говорить, что они истинны или ложны. Мы не будем рассматривать такие предложения.

Исходя из применений высказываний в обычных (человеческих) рассуждениях, естественно считать, что каждое высказывание может быть истинным или ложным, но не может быть одновременно истинным и ложным.

Каждому высказыванию припишем *значение истинности*: И (истина), если это — истинное высказывание, и Л (ложь), если это — ложное высказывание.

Ввиду того что нас будет интересовать не содержание высказывания, а его значение истинности, то высказывания (а), (в), (д), хотя и различного содержания, для нас тождественны, так как каждое из них имеет значение И (вместо «значение истинности» будем говорить кратко «значение») высказывания (б), (г), (е) тождественны, так как каждое из них имеет значение Л.

В дальнейшем мы отождествим высказывание с его значением, т. е. под И будем понимать и значение истинности (истину) и само истинное высказывание, под Л — значение истинности (ложь) и само ложное высказывание.

7. 2. Предложения, содержащие переменные. В математике очень часто применяются предложения, содержащие одну или несколько переменных: а) $x < 3$; б) $x^2 + 2 = 3x$; в) $x + y = 10$; г) $x \in C$ и т. п.

Эти предложения не являются высказываниями, но если вместо переменных подставить какие-нибудь их значения, предложения обращаются в высказывания, истинные или ложные в зависимости от подставленных значений.

Например, если в $x^2+2=3x$ вместо x подставить 1 или 2, получается истинное высказывание, если же подставить любое другое число, получается ложное высказывание. Если в $x + y = 10$ подставить вместо $(x, \ y)$, например пару значений (2, 8), получим истинное высказывание, если же подставить (3, 8), получим ложное высказывание. Если в $x \in C$ вместо x подставить, например, 3, получим истинное высказывание $3 \in C$, если же подставить $\frac{2}{3}$, получим ложное высказывание $\frac{2}{3} \in C$.

Предложение, содержащее переменные (хотя бы одну) и становящееся высказыванием при подстановке вместо переменных их значений, называется *высказывательной формой*.

Предполагается, что для каждой переменной, входящей в высказывательную форму, указано некоторое множество элементов — *область значений переменной*, — имена которых разрешается подставить вместо этой переменной.

Значениями переменных могут быть элементы различной природы. Например, в $x^2 + 2 = 3x$ под x понимается переменная для чисел (*числовая* переменная), вместо которой разрешается подставлять имена чисел из некоторого заданного числового множества, области значений переменной x. В высказывательной форме «Город x — столица БССР» буква x применяется в качестве переменной для городов, вместо которой разрешается подставить название одного из некоторого множества городов.

По числу содержащихся в них переменных различают *одноместные, двуместные, трехместные* и т. д. высказывательные формы. Так, $x^2 + 2 = 3x$ — одноместная высказывательная форма, $x + y = 10$ — двуместная, $x \cdot y = z$ — трехместная.

В дальнейшем под предложением будем иметь в виду высказывание или высказывательную форму.

§ 8. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

8. 1. Логическая структура сложного высказывания. Приведенные выше (7. 1) высказывания рассматриваются как *элементарные*, т. е. нерасчленяемые на другие высказывания.

Примерами *сложных* высказываний, расчленяющихся на другие высказывания, являются:

(а) «Это число — целое **и** (это число)* положительное»

(б) «Данный четырехугольник — ромб **или** (данный четырехугольник) прямоугольник»

(в) «Данное число является рациональным **или** (данное число) **не** является рациональным»

(г) «**Если** треугольник равносторонний, **то** он равнобедренный»

(д) «**Если** люди разумны **и** (они) сознают опасность войны, **то** они борются за мир»

(е) «$ab = 0$, **если и только если** $a = 0$ **или** $b = 0$» и т. п.

Высказывание (а) состоит из двух элементарных высказываний: «Это число — целое»; «Это число—положительное», соединенных словом «**и**».

---

* В скобки заключены слова, которые обычно опускаются.

Высказывание (б) составлено из элементарных высказываний «Данный четырехугольник — ромб» и «Данный четырехугольник — прямоугольник», соединенных словом **«или»**.

Высказывание (в) составлено из элементарного высказывания «Данное число является рациональным» и высказывания, полученного в результате его преобразования с помощью слова **«не»**, соединенных словом **«или»**.

Высказывание (г) составлено из элементарных высказываний «Треугольник равносторонний» и «Треугольник равнобедренный», соединенных словами **«если...,то»**.

Высказывание (д) составлено из элементарных высказываний «Люди разумны», «Они сознают опасность войны» и «Они борются за мир», определенным образом соединенных словами **«если..., то»**, **«и»**.

Высказывание (е) составлено из элементарных высказываний «$ab = 0$», «$a = 0$», «$b = 0$», определенным образом соединенных словами **«если и только если»** и **«или»**.

Слова **не, и, или, если..., то, если и только если** и некоторые другие обозначают на русском языке *логические операции*, с помощью которых из одних высказываний (элементарных или сложных) образуются другие высказывания.

Совокупность и порядок логических операций, с помощью которых сложное высказывание образовано из элементарных, составляют *логическую структуру* этого сложного высказывания.

8. 2. **Содержание и структура высказываний.** Высказывания различного содержания могут иметь одинаковую логическую структуру. Например, приведенное выше (8. 1) высказывание (д) и высказывание

(а) «Если число делится на 2 и делится на 3, то оно делится на 6»,

хотя совершенно различного содержания, имеют одинаковую структуру (мы будем дальше пользоваться термином «структура» в смысле «логическая структура»). Это легко обнаружить, если отвлечься от конкретного содержания этих высказываний, обозначив составляющие их элементарные высказывания какими-нибудь буквами.

Обозначим высказывания «Люди разумны» и «Число делится на 2», например, буквой p; высказывания «Они сознают опасность войны» и «Число делится на 3» — буквой q, а высказывания «Они борются за мир» и «Число делится на 6» — буквой r.

В принятых обозначениях структура высказываний (д) и (а) запишется так:

(д) — (а) «**Если** p **и** q, **то** r».

Как видно, высказывания о различных вещах могут иметь одинаковую структуру. С другой стороны, очень часто встречаются сложные высказывания об одних и тех же вещах, но различной структуры.

Рассмотрим приведенное выше высказывание (а) и высказывание

(а′) «Если число делится на 2 и не делится на 6, то оно не делится на 3».

Используя введенные выше обозначения для составляющих элементарных высказываний, структуру высказывания (а′) запишем так:

(а′) «Если p **и не** r, **то не** q».

Структуры высказываний (а) и (а′) различны. Однако они так связаны между собой, что оба этих сложных высказывания имеют одно и то же значение истинности при любых наборах значений истинности составляющих высказываний p, q и r.

Таким образом, если мы установили, что одно из этих сложных высказываний, например (а) истинно (имеет значение И), то истинность высказывания (а′) уже не нуждается в специальном доказательстве.

В силу той же связи между структурами, если мы считаем высказывание (д) истинным, то истинно также высказывание

(д′) «Если люди разумны и не борются за мир, то они не сознают опасности войны»,

структура которого совпадает со структурой высказывания (а′).

В других случаях сложные высказывания различной структуры при одних и тех же наборах значений составляющих элементарных высказываний имеют различные значения.

Как видно, важно уметь находить значение сложного высказывания по заданным значениям его элементарных составляющих. Для этого прежде всего необходимо знать точные определения логических операций, с помощью которых сложное высказывание образовано из элементарных.

Упражнения

74. Выделить структуры нижеследующих сложных высказываний (обозначить буквами элементарные составляющие и подчеркнуть слова, обозначающие логические операции):

а) Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм — ромб. б) Данное число делится на 2 и делится на 3 или не делится на 6. в) Если число — целое и положительное, то оно — натуральное. г) Если число—положительное и четное, то оно простое или больше 2; д) $a \geqslant 0$.

75. В нижеследующих сложных высказываниях обозначить буквами элементарные составляющие, причем одно и то же элементарное высказывание должно обозначаться одной и той же буквой во всех сложных высказываниях, в которые оно входит, и определить, какие из сложных высказываний имеют одинаковую структуру:

а) Если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и второе слагаемое делится на 3. б) Если одно слагаемое делится на 3 и второе слагаемое не делится на 3, то сумма не делится на 3. в) Если число — рациональное или иррациональное, то оно—вещественное. г) Если $a = 0$ или $b = 0$, то $ab = 0$. д) Если число не является вещественным, то оно не является рациональным и не является иррациональным. е) Если $ab \neq 0$, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$. ж) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$.

§ 9. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

9.1. Логические операции. Операции, выполняемые над высказываниями и порождающие новые высказывания, мы называем *логическими операциями*.

Исходные высказывания, над которыми выполняются операции, мы обозначим малыми латинскими буквами p, q, r,...

Приступая к определению логических операций, мы ставим перед собой задачу, чтобы эти определения как можно лучше соответствовали обычному смыслу, в котором употребляются слова

не, и, или, **если..., то, если** и **только если**

в естественном (русском) языке.

9.2. Отрицание. В обыденной речи мы очень часто пользуемся словом «**не**», или словами «**неверно, что**», когда мы хотим что-то отрицать. Например, если мы хотим отрицать, что (а) «Точка A лежит на прямой a»,

мы говорим «точка A **не** лежит на прямой a», или

(б) «**Неверно, что** точка A лежит на прямой a».

Нетрудно заметить, что значения истинности высказываний (а) и (б) находятся в определенной связи: если высказывание (а) истинно, высказывание (б) ложно; если (а) ложно, (б) истинно.

Операция, с помощью которой из высказывания (а) получено высказывание (б), и само высказывание (б) называется *отрицанием* высказывания (а).

Исходя из этого обычного смысла отрицания, приходим к следующему определению.

Определение. *Отрицанием некоторого высказывания p называется такое высказывание, которое истинно, когда p ложно, и ложно, когда p истинно.*

Отрицание высказывания p обозначим знаком $\overline{p}$ (p с чертой).

Например, отрицание высказывания $2 \in C$ обозначим символом $\overline{2 \in C}$, отрицание высказывания $a \parallel b$ — через $\overline{a \parallel b}$, отрицание $1 < 3$ — через $\overline{1 < 3}$.

Определение отрицания может быть записано в виде следующей таблицы, называемой *таблицей истинности*:

p	$\overline{p}$
И	Л
Л	И

В ней указано, какие значения истинности (И, Л) принимает отрицание $\overline{p}$ в зависимости от значений истинности исходного высказывания p.

9.3. Конъюнкция.* Если два высказывания соединены союзом **и**, то полученное сложное высказывание обычно считается истинным тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих его высказывания. Если хотя бы одно из составляющих высказываний ложно, то и полученное из них с помощью союза **и** сложное высказывание также считается ложным.

Например, высказывание «Число 2 простое и четное» истинно, так как оба составляющих его высказывания «Число 2 простое» и «Число 2 четное» истинны. Высказывание «Диагонали равнобочной трапеции равны и делятся точкой пересечения пополам» ложно, так как одно из составляющих высказываний, а именно «Диагонали равнобочной трапеции делятся точкой пересечения пополам», ложно.

Таким образом, исходя из обычного смысла союза **и**, приходим к следующему определению соответствующей логической операции.

Определение. *Конъюнкцией двух высказываний p и q называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания p и q.*

Это высказывание мы обозначим символом $p \wedge q$ (знак $\wedge$ заменяет союз **и**) и будем читать «p **и** q». Иногда, для достижения компактности записей, мы опустим знак $\wedge$, т. е. будем писать pq вместо $p \wedge q$. (В литературе встречается и знак & для обозначения конъюнкции.)

Определение конъюнкции может быть записано в виде следующей таблицы истинности:

---

* От лат. *conjunctio* — союз, связь.

p	q	$p\wedge q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

в которой для каждого из четырех возможных наборов значений исходных высказываний p и q задается соответствующее значение конъюнкции $p\wedge q$.

Определение конъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний.

Конъюнкция $p_1\wedge p_2\wedge \dots \wedge p_n$, которую мы обозначим кратко через $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$, истинна тогда и только тогда, когда истинны все высказывания $p_1, p_2, \dots, p_n$ (а следовательно, ложна, когда ложно хотя бы одно из этих высказываний).

9.4. Дизъюнкция.* В обыденной речи союз **или** применяется в двух различных смыслах: неразделительном (соединительном), когда сложное высказывание, образованное с помощью этого слова, считается истинным, когда истинно **хотя бы одно** из составляющих высказываний, и в разделительном, когда сложное высказывание считается истинным, когда истинно **только одно** из составляющих высказываний (в этом случае иногда говорят **«или ..., или»** **«либо ..., либо»**).

Вообще говоря, в естественном языке бывает трудно различить, в каком смысле применен в том или ином высказывании союз **или**. В языке современной логики эта двусмысленность устраняется путем различного обозначе-

*От лат. *disjunctio* — разобщение, различие.

ния операций, соответствующих союзу **или** в одном и в другом смысле.

Исходя из неразделительного смысла союза **или**, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Дизъюнкцией двух высказываний называется такое новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда остинно* ***хотя бы одно*** *из этих высказываний.*

Дизъюнкцию высказываний p и q мы обозначим символом $p \vee q$ (т. е. знак $\vee$ заменяет союз **или** в неразделительном смысле) и будем читать «p **или** q».

Определение дизъюнкции может быть записано в виде следующей таблицы истинности:

p	q	$p \vee q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Определение дизъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число составляющих.

Дизъюнкция $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, которую мы обозначим кратко через $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i$, истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (а следовательно, ложна, когда ложны все эти высказывания).

9. 5. Импликация.* В наших рассуждениях, в частности в математических доказательствах, мы очень часто

---

*От лат. *implico* — тесно связываю.

пользуемся сложными высказываниями, составленными из двух высказываний, соединенных словами «**если** ... , то».

Обычно высказывание типа «**Если** p, то q» понимается в смысле высказывания о «следовании» q из p (p — *основание*, или *посылка*, q — *следствие*, или *заключение*).

В разговорном языке имеются многочисленные синонимы для «Если p, то q: «из p следует q», «p влечет q», «p достаточное условие для q», «q необходимое следствие из p», «q при условии, что p» и др.

Указание ряда синонимов для «Если p, то q» еще не раскрывает смысла этого сложного высказывания и связи его значения истинности со значениями истинности составляющих p и q. Для выяснения этой связи рассмотрим несколько конкретных примеров.

Нам известно из арифметики, что высказывание «Если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3» истинно, т. е. что из высказывания «Каждое слагаемое делится на 3» (p) следует высказывание «Сумма делится на 3» (q).

Выясним, какие наборы значений истинности составляющих p и q возможны, когда высказывание «Если p, то q» истинно.

Можно указать случай, когда p и q оба истинны. Например, если в качестве слагаемых взять числа 6 и 9, то истинны и высказывание «Каждое слагаемое делится на 3», и высказывание «Сумма делится на 3». Если взять в качестве слагаемых 4 и 5, то p ложно, а q истинно. Если же взять в качестве слагаемых 4 и 7, то и p и q ложны.

Совершенно очевидно, что только один случай невозможен: мы не найдем таких двух слагаемых, чтобы каждое из них делилось на 3, а их сумма не делилась на 3, т. е. чтобы p было истинным высказыванием, а q—ложным.

Рассмотрим другой пример.

Из геометрии известно, что высказывание «Если данный четырехугольник — квадрат, то около него можно описать окружность» истинно, т. е. из высказывания «Данный четырехугольник — квадрат» (p) **следует** высказывание «Около этого четырехугольника можно описать окружность» (q).

Здесь, так же как и в предыдущем примере, возможны три случая (три набора значений истинности составляющих p и q):

1) p и q истинны, т. е. данный четырехугольник — квадрат и около него можно описать окружность;

2) p ложно и q истинно, т. е. данный четырехугольник не является квадратом, но около него можно описать окружность;

3) p и q ложны, т. е. данный четырехугольник не является квадратом и около него нельзя описать окружность.

Невозможен лишь один случай: p истинно и q ложно, т. е. невозможен случай, когда четырехугольник — квадрат, а около него нельзя описать окружность.

В приведенных примерах мы обнаружили, что если из высказывания p **следует** высказывание q, т. е. высказывание о следовании «Если p, то q» истинно, то невозможно, чтобы p было истинным высказыванием, а q ложным.

Высказывание «Если p, то q» с логической точки зрения имеет тот же смысл, что и высказывание «Неверно, что p истинно и q ложно».

Обычно, когда мы хотим установить ложность высказывания «Если p, то q», т. е. что q **не следует** из p, мы показываем, что возможен случай, когда p истинно, а q ложно.

Например, высказывание «Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб» ложно.

Для установления ложности этого высказывания мы обычно строим четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, но который не является ромбом (такой четырехугольник легко получить из двух неравных равнобедренных треугольников с равными основаниями, сложив их так, чтобы совпали основания). Таким образом, мы показываем возможность случая, когда основание p истинно, а следствие q ложно, и этим устанавливается ложность высказывания о следовании «Если p, то q».

Итак, в обычном понимании высказывание «Если p, то q» считается ложным в том и только в том случае, когда p истинно, а q ложно.

Необходимо отметить еще одну особенность: в любом высказывании типа «Если p, то q» основание p и следствие q связаны по содержанию. В первом из приведенных выше примеров основание p выражает некоторое свойство слагаемых, а следствие q — свойство суммы этих слагаемых; во втором — основание p выражает свойство четырехугольника (быть квадратом), а следствие q — другое свойство этого же четырехугольника (быть вписанным в окружность).

Впрочем, связь по содержанию свойственна для составляющих любого используемого в обыденном языке сложного высказывания. Если составляющие сложного высказывания не связаны по содержанию, то это высказывание считается бессмысленным.

Приведенные выше примеры выясняют, что высказывание «Если p, то q» характеризуется следующими двумя условиями:

1) оно ложно в том и только в том случае, когда p истинно, а q ложно;

2) p и q связаны по содержанию.

При определении логических операций мы отвлекаемся от содержания высказываний, учитывая лишь их значение истинности.

Поэтому для определения операции, соответствующей соединению двух высказываний p и q с помощью слов **«если . . . , то»**, мы будем исходить лишь из условия 1). Эту операцию и результат ее применения называют *импликацией*. Импликацию «если p, то q» обозначим символом $p \Longrightarrow q$ и будем читать «если p, то q», или «p имплицирует q», или «p влечет q». Итак, мы пришли к определению.

Определение. *Импликацией* $p \Longrightarrow q$ *называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда p истинно и q ложно.*

Это определение может быть записано в виде следующей таблицы истинности:

p	q	$p \Longrightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

В связи с определением импликации сделаем два замечания.

1. На первый взгляд кажутся «неестественными» случаи, когда основание и следствие или только основание ложны (3-я и 4-я строки таблицы). Не вызывает сомнения истинность высказывания «Если 9 делится на 3, то 81 делится на 3», но многие сомневаются в истинности высказывания «Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3», хотя истинность обоих высказываний непосредственно усматривается из сравнения с высказыванием «Если a делится на 3, то a^2 делится на 3», частными случаями которого они являются. Такого рода конкретные следствия из общих предложений широко используются в математических доказательствах и единственное отличие их от «привычных» разговорных оборотов состоит в том, что в математике обычно не пользуются сослагательным наклонением. (В самом деле,

истинность импликации «Если бы 10 делилось на 3, то и 100 делилось бы на 3» уже никаких возражений и недоумений не вызывала бы (!).)

2. Что же касается таких истинных импликаций, как «Если $2 \times 2 = 4$, то Минск — столица БССР» (1-я строка таблицы) и «Если $2 \times 2 = 5$, то Могилев — столица БССР» (4-я строка таблицы), то здесь налицо «парадоксальные» последствия отказа от условия 2). Разумеется, несмотря на истинность этих импликаций никакое «следование» в них не выражается, так как основание и следствие не связаны по содержанию. Такие высказывания в обыденной речи квалифицируются как бессмысленные.

Это явление — наличие истинных импликаций, не являющихся высказываниями о следовании, — объясняется, конечно, тем, что при определении импликации мы не учитывали условие 2), предусматривающее связь по содержанию между основанием и следствием. Поэтому определяемое с помощью условия 1) множество импликаций шире множества высказываний о следовании, удовлетворяющих условиям 1) и 2), содержит его в качестве собственной части: всякое истинное высказывание о следовании выражается истинной импликацией, но не всякая истинная импликация есть выражение высказывания о следовании.

Мы будем рассматривать лишь такие импликации, которые удовлетворяют и условию 2), хотя это условие нельзя выразить в явном виде в формальном определении логической операции.

9. 6. Эквиваленция. Сложное высказывание «Четырехугольник — параллелограмм, **если и только если** его диагонали делятся точкой пересечения пополам» мы понимаем в том же смысле, что и высказывание «**Если** четырехугольник — параллелограмм, **то** его диагонали делятся точкой пересечения пополам **и, если** диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то четырехугольник — параллелограмм».

Отвлечемся от содержания этих высказываний. Обозначим элементарное высказывание «Четырехугольник — параллелограмм» через p, а высказывание «Диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам» — через q.

Таким образом, всякое высказывание типа

$$«p, \text{ если и только если } q» \tag{1}$$

понимается обычно в том же смысле, что и высказывание

$$«\text{Если } p, \text{ то } q \text{ и, если } q, \text{ то } p». \tag{2}$$

Заменяя в (2) слова **«если . . . , то»** знаками импликации, а союз **«и»** — знаком конъюнкции, получаем

$$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p). \tag{2'}$$

Это сложное высказывание составлено из элементарных с помощью уже известных нам операций импликации и конъюнкции, и мы можем для него составить таблицу истинности исходя из определений (таблиц) этих операций.

Выпишем в первых двух столбцах всевозможные наборы значений двух исходных высказываний p и q:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И

В третьем столбце выпишем значения импликации $p \Longrightarrow q$, соответствующие этим наборам значений p и q, согласно определению импликации; в четвертом столбце аналогично выпишем значения импликации $q \Longrightarrow p$. Наконец, в пятом столбце выпишем значения конъюнкции (2′), соответствующие значениям импликаций $p \Longrightarrow q$ и $q \Longrightarrow p$ в третьем и четвертом столбцах.

Как видно из приведенной таблицы, высказывание (2), а следовательно и высказывание (1), истинно тогда и только тогда, когда высказывания p и q оба истинны или оба ложны.

Сложное высказывание «p, **если и только если** q» мы назовем *эквиваленцией* и обозначим через $p \Longleftrightarrow q$ (знак $\Longleftrightarrow$ заменяет слова «**если и только если**»).

Таким образом, исходя из обычного смысла слов «**если и только если**», мы приходим к следующему определению.

Определение. *Эквиваленцией двух высказываний p и q называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба эти высказывания p и q истинны или оба ложны.*

Это определение может быть записано в виде следующей таблицы:

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Упражнения

76. Операцию, соответствующую союзу «или» в разделительном смысле, называют *строгой* дизъюнкцией. Определить строгую дизъюнкцию двух высказываний p и q и составить соответствующую таблицу истинности (строгую дизъюнкцию обозначим символом $\dot{\vee}$).

77. Из элементарных высказываний: p — «Это число — целое»; q — «Это число положительное»; r — «Это число простое» и s — «Это число делится на 3» составлены следующие сложные высказывания:

а) $p \vee q$; б) $p \wedge q$; в) $p \vee \bar{p}$; г) $q \wedge \bar{q}$; д) $s \Longleftrightarrow \bar{r}$; е) $(p \wedge r) \Longrightarrow \bar{s}$; ж) $(p \wedge s) \Longrightarrow \bar{r}$; з) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$; и) $\bar{p} \vee \bar{s}$; к) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$.

Прочитать все эти сложные высказывания на русском языке.

78. В нижеследующих сложных высказываниях заменить элементарные высказывания буквами (p, q, r, s, . . .) и слова, выражающие логические операции, — соответствующими знаками:

а) Если основание пирамиды — правильный многоугольник и высота проходит через центр основания или двугранные углы при основании равны, то пирамида — правильная. б) Если основание пирамиды — прямоугольный треугольник, то боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, если и только если высота проходит через середину гипотенузы. в) Если число целое или выражается обыкновенной дробью, или выражается конечной десятичной дробью, то оно представимо в виде бесконечной десятичной периодической дроби. г) Если прямая a параллельна прямой b и прямая b лежит в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α или прямая a лежит в плоскости α. д) Если $a \parallel b$ и a_1 — параллельная проекция прямой a на плоскость α и b_1 — параллельная проекция прямой b на плоскость α, то $a_1 \parallel b_1$ или a_1 совпадает с b_1.

79. Определить значения нижеследующих сложных высказываний, если известно, что p имеет значение Л, q — И и r — И.

а) $p \wedge (q \wedge r)$; б) $(p \wedge q) \wedge r$; в) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$; г) $(p \wedge q) \Longrightarrow r$; д) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (r \vee \bar{q})$; е) $((p \vee q) \wedge r) \Longleftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$.

80. а) Известно, что импликация $p \Longrightarrow q$ истинна, а эквиваленция $p \Longleftrightarrow q$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $q \Longrightarrow p$? б) Известно, что эквиваленция $p \Longleftrightarrow q$ истинна. Что можно сказать о значениях эквиваленций $\bar{p} \Longleftrightarrow q$ и $\bar{q} \Longleftrightarrow p$, о значениях импликаций $\bar{p} \Longrightarrow q$ и $q \Longrightarrow p$?

§ 10. ФОРМУЛЫ И ФУНКЦИИ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

10. 1. Формулы логики высказываний. Как видно из предыдущего, структура сложных высказываний выражается в виде конечной последовательности букв (p, q, r, . . .), обозначающих составляющие элементарные высказывания, знаков операций ($^-$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$), выполняемых над составляющими высказываниями, и скобок, определяющих порядок операций.

Такую конечную последовательность букв, знаков операций и скобок, выражающую логическую структуру высказывания, обычно называют *формулой* логики высказываний.

Буквы p, q, r, ... применяются не только для обозначения определенных высказываний, но и в качестве *переменных* для высказываний (*высказывательных переменных*), вместо которых можно подставить произвольные высказывания. В последнем случае формула выражает логическую структуру не одного какого-нибудь определенного высказывания, а любого высказывания из множества высказываний различного содержания, объединяемых общей структурой.

Например, формула $(p \wedge q) \Longrightarrow r$ выражает логическую структуру высказывания д) (8. 1), и высказывания а) (8. 2), и высказывания «**Если** число целое **и** положительное, **то** оно — натуральное», и любого другого высказывания (высказывания другого содержания), имеющего такую же логическую структуру.

Ввиду того что мы отвлекаемся от содержания высказывания и учитываем лишь его значение истинности, вполне естественно принять, что *высказывательные переменные принимают лишь два значения*: *И* и *Л*.

Буквы И и Л, обозначающие «истинное высказывание» и «ложное высказывание», соответственно назовем также *постоянными*.

Греческие буквы φ, ψ, ... или одну букву с индексом φ_1, φ_2, ... мы применим для сокращенного обозначения формул логики высказываний.

10.2. Определение формулы. Мы дадим сейчас точное определение формулы логики высказываний, позволяющее выяснить относительно любого выражения является оно формулой или нет, не обращаясь при этом к смыслу символов, из которых оно составлено.

Определение. а) $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$, *а также И и Л — формулы (элементарные формулы); б) если* φ_1 *и* φ_2 *— формулы, то* $\overline{\varphi_1}$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2)$, *и* $(\varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2)$ *— формулы; в) других формул логики высказываний нет.*

Покажем в качестве примера, как используется это определение для выяснения того, является ли конечная последовательность символов $(((p \wedge q) \vee r) \Longrightarrow ((\overline{p} \vee q) \Longrightarrow \Longrightarrow \overline{r}))$ — формулой.

1. p, q, r — формулы;	(а))
2. $\overline{p}, \overline{r}$ — формулы;	(б), из 1)
3. $(p \wedge q)$ — формула;	(б), из 1)
4. $((p \wedge q) \vee r)$ — формула;	(б), из 3 и 1)
5. $(\overline{p} \vee q)$ — формула;	(б), из 2 и 1)
6. $((\overline{p} \vee q) \Longrightarrow \overline{r})$ — формула;	(б), из 5 и 2)
7. $(((p \wedge q) \vee r) \Longrightarrow ((\overline{p} \vee q) \Longrightarrow \overline{r}))$ — формула.	(б), из 4 и 6)

(Справа указан используемый пункт определения.)

Формулы 1 — 6, образующиеся в процессе составления формулы 7, называют ее *частями* (или *подформулами*).

Определим сейчас, является ли формулой последовательность символов $(p \Longrightarrow q) \vee r)$.

Заметим, что в элементарных формулах а) нет скобок, а в формулах, получаемых с помощью правил, сформулированных в б), скобки фигурируют парами, состоящими из одной левой и одной правой скобки. Поэтому, учитывая в), можно утверждать, что в любой формуле логики высказываний имеется четное число скобок, причем столько же правых скобок, сколько левых. Отсюда следует, что выражение $(p \Longrightarrow q) \vee r)$ не является формулой.

10.3. Соглашения о записи формул. Для упрощения записи формул (уменьшения числа скобок в них) мы примем следующие соглашения:

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, т. е. писать

$$\overline{p \vee q} \wedge r \text{ вместо } \overline{(p \vee q)} \wedge r;$$

2. Считать, что знак конъюнкции связывает «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, т. е. писать

$$p \wedge q \vee r \text{ вместо } (p \wedge q) \vee r;$$
$$p \Longrightarrow q \wedge r \text{ вместо } p \Longrightarrow (q \wedge r);$$
$$p \wedge q \Longleftrightarrow r \wedge s \text{ вместо } (p \wedge q) \Longleftrightarrow (r \wedge s).$$

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее, чем знаки импликации и эквиваленции, т. е. писать

$$p \vee q \Longrightarrow r \text{ вместо } (p \vee q) \Longrightarrow r;$$
$$p \Longleftrightarrow r \vee r \text{ вместо } p \Longleftrightarrow (q \vee r).$$

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, т. е. писать

$$p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow r \text{ вместо } (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow r.$$

5. Опускать внешние скобки, т. е. те скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу; так, формулу $(p \wedge (q \Longrightarrow r))$ писать $p \wedge (q \Longrightarrow r)$.

Соглашения 1 — 5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощает запись формул.

Например, записанная без учета этих соглашений формула

$$(((p \wedge q) \vee r) \Longrightarrow ((\bar{p} \vee q) \Longrightarrow \bar{r}))$$

будет выглядеть так:

$$pq \vee r \Rightarrow (\bar{p} \vee q \Rightarrow \bar{r}).$$

При чтении формула может быть названа по «последней» операции (знак которой связывает слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу). Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.

Упражнения

81. Выяснить для каждого из нижеследующих выражений, является ли оно формулой логики высказываний:

а) $(((p \Rightarrow \bar{q}) \wedge r) \Leftrightarrow ((q \vee r) \Rightarrow \bar{p}))$; б) $((p \wedge \Rightarrow) \vee q)$; в) $((p \vee q) \Rightarrow r)$.

82. Записать нижеследующие формулы с учетом принятых выше соглашений об опускании скобок:

а) $(((p \Rightarrow q) \wedge \bar{r}) \Leftrightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)))$; б) $(((p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow q) \vee ((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})))$; в) $(p \wedge (q \vee (r \Rightarrow \overline{(p \Leftrightarrow q)})))$

83. Указать такой набор значений переменных p, q, r, при котором формулы $pq \Rightarrow r$ и $p(q \Rightarrow r)$ принимают различные значения. То же для формул $p \vee q \Rightarrow r$ и $p \vee (q \Rightarrow r)$.

10.4. Функции логики высказываний. Пусть $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — формула логики высказываний, содержащая переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Нетрудно заметить, что такая формула определяет на множестве всевозможных наборов значений переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е. на множестве $\{И, Л\}^n$, некоторую функцию φ, принимающую, как и ее аргументы, значения из $\{И, Л\}$, т. е. отображение типа

$$\{И, Л\}^n \xrightarrow{\varphi} \{И, Л\}.$$

Формула представляет собой лишь одну из возможных форм задания функции φ. Поскольку каждая переменная p_i принимает лишь два значения (И и Л), то область определения функции φ — $\{И, Л\}^n$ — конечное множество. Оно содержит 2^n элементов. Поэтому такая функция (типа $\{И, Л\}^n \xrightarrow{\varphi} \{И, Л\}$) всегда может быть задана и с помощью (конечной) таблицы истинности, содержащей 2^n строк.

Мы будем говорить, что таблица, определяющая функцию φ, *соответствует* формуле $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, определяющей эту же функцию. В каждой строке таблицы для определенного набора значений переменных указано соответствующее значение функции, которое мы и назовем *значением формулы*.

Так, функция, определяемая формулой $pq \Longrightarrow r$, может быть задана следующей таблицей истинности, содержащей 8 строк:

p	q	r	pq	$pq \Longrightarrow r$
И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л
И	Л	И	Л	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	И

Функция типа $\{И, Л\}^n \xrightarrow{\varphi} \{И, Л\}$, т. е. отображение множества n-ок элементов из $\{И, Л\}$, в множество $\{И, Л\}$, называется *n-местной функцией логики высказываний* или *высказывательной функцией n высказывательных аргументов.*

Упражнения

84. Составить схему для образования всевозможных наборов значений четырех высказывательных переменных.

85. Определить с помощью соответствующих таблиц истинности всевозможные высказывательные функции двух высказывательных аргументов, т. е. заполнить таблицу

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	...
И	И	Л	Л	Л	Л					
И	Л	Л	Л	Л	Л					
Л	И	Л	Л	И	И					
Л	Л	Л	И	Л	И					

для всевозможных функций типа $\{И,\ Л\}^2 \xrightarrow{\varphi} \{И,\ Л\}$. Сколько всего таких функций?

86. Составить таблицы истинности, соответствующие нижеследующим формулам:

а) $\overline{p \vee q}$; б) $\bar{p}\,\bar{q}$; в) $p(q \vee r)$; г) $pq \vee pr$; д) $p \Rightarrow q \vee r$; е) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$; ж) $p \vee qr$; з) $(p \vee q)(p \vee r)$.

Указать, какие из этих формул определяют одну и ту же функцию.

87. Доказать, что нет такого набора значений переменных p, q, r, при котором формулы $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ и $pq \Rightarrow r$ принимали бы различные значения. Что можно сказать о функциях, определяемых этими формулами?

11.1. Отношение равносильности формул. Составим таблицу истинности для двух формул

$$pq \Longrightarrow r \tag{1}$$

и

$$p\bar{r} \Longrightarrow \bar{q}. \tag{2}$$

p	q	r	pq	$pq \Longrightarrow r$	$\bar{r}$	$p\bar{r}$	$\bar{q}$	$p\bar{r} \Longrightarrow \bar{q}$
И	И	И	И	И	Л	Л	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Так как столбцы 5 и 9 значений формул (1) и (2) совпадают, т. е. эти формулы принимают равные значения (обе — И, или обе — Л) при любом наборе значений переменных p, q, r, то они определяют одну и ту же функцию логики высказываний (в данном случае — одну и ту же трехместную функцию, или отображение типа $\{И, Л\}^3 \xrightarrow{\varphi} \{И, Л\}$).

Определение. *Две формулы логики высказываний, определяющие одну и ту же функцию, называются равносильными.*

Равносильность формул мы обозначим знаком $\equiv$.

Таким образом, построенная выше таблица истинности доказывает равносильность формул (1) и (2), т. е.

$$pq \Longrightarrow r \equiv p\bar{r} \Longrightarrow \bar{q}.$$

(Попутно мы здесь решили поставленную раньше (8. 2) задачу: установить, что высказывания «Если p и q, то r» (д) — (а) и «Если p и не r, то не q» (д$'$) — (а$'$) имеют одинаковые значения истинности при любых наборах значений составляющих p, q, r.)

Очевидно, что отношение равносильности формул логики высказываний (так же как отношение тождественности алгебраических выражений) является:

1. Рефлексивным, т. е. $\varphi \equiv \varphi$ для любой формулы φ.
2. Симметричным, т. е. если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, то $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ для любых формул φ_1 и φ_2.
3. Транзитивным, т. е. если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ и $\varphi_2 \equiv \varphi_3$, то $\varphi_1 \equiv \varphi_3$ для любых формул φ_1, φ_2, φ_3.

Эти свойства позволяют заменить любую формулу равносильной ей, если нас интересует не структура формулы, а определяемая ею функция, и лежат в основе преобразования формул с целью их упрощения или приведения к определенной, стандартной, форме.

Так же как при преобразовании алгебраических выражений, используются свойства арифметических операций; при преобразовании формул логики высказываний используются свойства логических операций.

11.2. Свойства логических операций. Приведем перечень наиболее важных равносильностей формул, выражающих свойства логических операций, непосредственно усматриваемых из определений этих операций или легко устанавливаемых с помощью таблиц истинности.

$p \equiv p$ (закон двойного отрицания); (1)
$pq \equiv qp$ (коммутативность конъюнкции); (2)
$p \vee q \equiv q \vee p$ (коммутативность дизъюнкции); (3)
$p(qr) \equiv (pq)r$ (ассоциативность конъюнкции); (4)
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ассоциативность дизъюнкции); (5)
$p(q \vee r) \equiv pq \vee pr$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции); (6)
$p \vee qr \equiv (p \vee q)(p \vee r)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции); (7)
$pp \equiv p$; (8)
$p \vee p \equiv p$; (9)
$p \vee \bar{p} \equiv$ И (закон исключенного третьего); (10)
$\bar{p}p \equiv$ Л (закон противоречия); (11)
pИ $\equiv p$; (12)
$p \vee$ И $\equiv$ И; (13)
pЛ $\equiv$ Л; (14)
$p \vee$ Л $\equiv p$; (15)
$\overline{pq} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ (16)
$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p}\bar{q}$ (17)
(законы де Моргана);
$p \Longrightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$; (18)
$p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q)(q \Longrightarrow p)$. (19)

11.3. Преобразование формул. В качестве примера преобразования формулы логики высказываний с использованием некоторых из перечисленных выше свойств приведем преобразование формулы (1)

$$pq \Longrightarrow r$$

в формулу (2)

$$p\bar{r} \Longrightarrow \bar{q},$$

чем и будет доказана равносильность этих формул, установленная выше (11.1) с помощью таблицы истинности (в правом столбце, в скобках, указаны используемые свойства логических операций):

$$
\begin{aligned}
pq \Rightarrow r &\equiv \overline{pq} \vee r; && (18)\\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r; && (16)\\
&\equiv (\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}; && (3,\ 5)\\
&\equiv \overline{p\bar{r}} \vee \bar{q}; && (1,\ 16)\\
&\equiv p\bar{r} \Rightarrow \bar{q}. && (18)
\end{aligned}
$$

Как видно, преобразование формул логики высказываний во многом похоже на тождественные преобразования алгебраических выражений.

Упражнения

88. Доказать с помощью таблиц истинности приведенные выше равносильности (6), (7), (10), (11), (16)—(18).

89. Используя равносильности (1) — (18), доказать посредством преобразований формул следующие равносильности:

а) $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$; б) $p \Rightarrow q \equiv \overline{p\bar{q}}$; в) $p \vee q \equiv \overline{\bar{p}\bar{q}}$; г) $pq \equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$; д) $\bar{p} \Rightarrow q \equiv \overline{\bar{p}\bar{q}}$; е) $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p\bar{q}$; ж) $pq \vee p\bar{q} \equiv p$; з) $(p \vee q)(p \vee \bar{q}) \equiv p$; и) $pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \equiv p \Rightarrow q$; к) $p \vee \bar{p}q \equiv p \vee q$; л) $p(\bar{p} \vee q) \equiv pq$; м) $\bar{p} \vee pq \equiv \bar{p} \vee q$; н) $\bar{p}(p \vee q) \equiv \bar{p}q$.

90. Следующие равносильности доказать двумя способами — с помощью таблиц истинности и посредством преобразований:

а) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv pq \Rightarrow r$; б) $(p \Rightarrow q)(p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow qr$; в) $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv pq \Rightarrow r$; г) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; д) $pq \vee p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \equiv$ И.

91. Следующие формулы с помощью преобразований привести к возможно более простому виду:

а) $p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$; б) $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}$; в) $\overline{(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow \bar{p})}$; г) $(p \Rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$; д) $\overline{\bar{p}\bar{q}} \vee (p \Rightarrow q)\, p$.

92. Мы определнлн пять логнческнх операцнй ($\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$), каждую незавнснмо от другнх. Оказывается, можно огранн-чнться двумя нсходнымн операциямн, а остальные выразить с по-мощью этнх двух. Найтн такне пары операцнй н показать, как осталь-ные выражаются через ннх.

(Указанне. В такую пару обязательно должна входнть одна из операцнй $\overline{}$ нлн $\Rightarrow$.)

93. В сложном высказываннн «Еслн завтра будет хорошая пого-да, то мы пойдем на пляж н будем купаться нлн поедем в лес за грнбамн» заменнть элементарные высказывання переменнымн, а слова, выражающне логнческне связкн, — знакамн соответствующнх опера-цнй. Отрнцанне полученной формулы преобразовать с целью упро-щення. Сформулнровать это отрнцанне на русском языке.

94. Используя законы де Моргана (16), (17), преобразовать нnже-следующне формулы так, чтобы знак отрнцання был отнесен к от-дельным переменным:

а) $\overline{\bar{p} \vee q}$; б) $\overline{pq \vee \bar{r}}$; в) $\overline{p(q \vee \bar{r})}$.

95. Равноснльностн (16) н (17), выражающне законы де Моргана, распространяются на случай n переменных:

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} p_i} \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \bar{p}_i; \tag{16'}$$

$$\overline{\bigvee_{i=1}^{n} p_i} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bar{p}_i. \tag{17'}$$

Для $n = 2$ этн равноснльностн доказаны (напрнмер, с помощью таблнц нстнниостн, упр. 88). Доказать нх для любого n нндукцней по чнслу переменных, т. е. доказать нх для n в предположеннн, что онн нмеют место для $n - 1$ переменных.

96. Доказать равноснльностн:

а) $p \vee qrs \equiv (p \vee q)(p \vee r)(p \vee s)$; б) $p \vee \bigwedge_{i=1}^{n} q_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} (p \vee q_i)$.

97. Даны два сложных высказывания: «Еслн одно слагаемое де-лится на 3 н сумма делнтся на 3, то н другое слагаемое делнтся на 3» н «Еслн одно слагаемое делнтся на 3, а другое не делнтся на 3, то сумма не делнтся на 3».

Заменить элементарные высказывания, входящие в состав этих сложных высказываний, переменными, а слова, выражающие логические связки, — знаками соответствующих операций. Доказать, что полученные формулы равносильны.

Сделать то же для высказываний: «Если $a > b$ и ($b > 0$ или $b = 0$), то $a > 0$» и «Если $a > b$ и $a \ngtr 0$, то $b \ngtr 0$ и $b \neq 0$».

§ 12. ТОЖДЕСТВЕННО-ИСТИННЫЕ ФОРМУЛЫ

12.1. Три класса формул. Множество всевозможных формул логики высказываний с точки зрения принимаемых этими формулами значений разбивается на три класса.

1. Формулы, принимающие значение И при всех наборах значений входящих в них переменных, называются *тождественно-истинными*.

2. Формулы, принимающие значение Л при всех наборах значений входящих в них переменных, называются *тождественно-ложными* (их отрицания — тождественно-истинные).

3. Формулы, принимающие при некоторых наборах значений переменных значение И, при других — значение Л, называются *выполнимыми*.

Особую роль играют тождественно-истинные формулы, выражающие *законы логики*, на которых основаны наши рассуждения (дальше (§ 13) будет показано, как наши рассуждения основываются на законах логики, выражаемых тождественно-истинными формулами).

Предложение «φ — тождественно-истинная формула» мы обозначим кратко так: $\vdash \varphi$.

12.2. Отношение равносильности и эквиваленция. Докажем, что если формулы φ_1 и φ_2 равносильны, то формула $\varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2$ тождественно-истинна, и обратно, т. е.

$$\text{если } \varphi_1 \equiv \varphi_2, \text{ то } \vdash \varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2, \text{ и если } \vdash \varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2, \text{ то } \varphi_1 \equiv \varphi_2.$$

Действительно, если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, то формулы φ_1 и φ_2 принимают обе значение И или обе значение Л при любом наборе значений входящих в них переменных, а в этом случае формула $\varphi_1 <=> \varphi_2$, согласно определению эквиваленции, принимает только значение И, т. е. $\vdash \varphi_1 <=> \varphi_2$.

Обратно, если $\vdash \varphi_1 <=> \varphi_2$, то φ_1 и φ_2 принимают при любом наборе значений входящих в них переменных обе значение И или обе значение Л, т. е. $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Таким образом, исходя из доказанного предложения, каждая из перечисленных выше (11.2) равносильностей (1) — (19) порождает тождественно-истинную формулу (достаточно заменить знак равносильности $\equiv$ знаком эквиваленции $<=>$).

Упражнение

98. Записать тождественно-истинные формулы, порождаемые равносильностями (1) — (19), 11.2.

(Указание. В некоторых равносильностях можно обойтись без знака эквиваленции. Например, так как $p \vee \overline{p} \equiv$ И, то $\vdash p \vee \overline{p}$. Аналогично, так как pЛ $\equiv$ Л, то $\overline{p\text{Л}} \equiv$ И и $\vdash \overline{p\text{Л}}$.)

12.3. Перечень тождественно-истинных формул. Выпишем еще несколько тождественно-истинных формул, находящих широкое применение в практике рассуждений.

$(p => q)(r = q) <=> (p \vee r => q)$; (1)
$pq => p$; (2)
$(p => q)(p => r) <=> (p => qr)$; (3)
$(p => q)\, p => q$; (4)
$(p => q)\, \overline{q} => \overline{p}$; (5)
$p => q <=> \overline{q} => \overline{q}$ (закон контрапозиции); (6)
$pq => r <=> p\overline{r} => \overline{q}$ (закон расширенной контрапозиции); (7)
$p => (q => r) <=> pq => r$; (8)
$(p \vee q)\overline{p} => q$; (9)

$$(p \Rightarrow q\bar{q}) \Rightarrow \bar{p}; \tag{10}$$

$$(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \text{ (закон силлогизма).} \tag{11}$$

12.4. Подстановка. Разумеется, этот перечень не исчерпывает все тождественно-истинные формулы, находящие применение в наших рассуждениях. Вместе с тем каждая из перечисленных тождественно-истинных формул порождает новые тождественно-истинные формулы в результате подстановки вместо какой-нибудь входящей в нее переменной произвольной формулы.

Действительно, если $\vdash \varphi(\ldots, p, \ldots)$ содержит переменную p, то, подставив вместо переменной p, всюду где она входит в φ, произвольную формулу ψ, в результате получим формулу $\varphi(\ldots, \psi, \ldots)$, которая принимает те же значения, что и исходная формула $\varphi(\ldots, p, \ldots)$, так как ψ принимает те же значения (И, Л), что и p.

Например, $\vdash (st \vee q)(\bar{s} \vee \bar{t}) \Rightarrow q$, так как эта формула получается из тождественно-истинной формулы (9) подстановкой вместо переменной p формулы st.

Можно, разумеется, применить подстановку к нескольким или даже ко всем переменным, входящим в тождественно-истинную формулу. Например, $\vdash (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)(\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3)$, так как эта формула получается из (11) подстановкой вместо p формулы φ_1, вместо q формулы φ_2 и вместо r формулы φ_3.

12.5. Проблема разрешения. Ввиду особой роли тождественно-истинных формул, выражающих законы логики, естественно, возникает вопрос о существовании общего метода (*разрешающего* метода, или *разрешающей* процедуры), позволяющего относительно любой конкретной формулы логики высказываний ответить, является ли она тождественно-истинной.

Укажем несколько разрешающих методов.

1. Составление таблицы истинности, соответствующей данной формуле. Если последний столбец таблицы (столбец значений данной формулы) состоит из одних И, данная формула тождественно-истинна; если же в этом столбце содержится хотя бы одна Л, она не является таковой.

Приведем в качестве примера таблицу истинности для формулы (11) (12.3):

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	(11)
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И

Разумеется, составление таблицы истинности не всегда практически удобный разрешающий метод (при большом числе переменных таблица истинности очень громоздка, содержит 2^n строк, где n — число входящих в формулу переменных). Но оно всегда состоит из конечного числа шагов и в принципе всегда дает ответ на поставленный вопрос.

2. Преобразование формулы (приведение ее к *конъюнктивной нормальной форме*). Все операции, знаки которых содержаться в формуле, выражают через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание; знаки отрицания сводятся к отдельным переменным (использованием законов де Моргана); используются законы двойного отрицания, коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции, дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции. В результате этих преобразований формула приводится к виду дизъюнкции из переменных или их отрицаний, либо к виду конъюнкции таких дизъюнкций (конъюнктивной нормальной форме). Если в каждой дизъюнкции содержится какая-нибудь переменная вместе с ее отрицанием, данная формула тождественно истинна; если же существует хотя бы одна дизъюнкция, не содержащая ни одной переменной вместе с ее отрицанием, данная формула не является тождественно истинной.

Применим этот метод в качестве примера к формуле (11):

$$(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv \overline{(\bar{p} \vee q)(\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r);$$

$$\equiv \overline{\bar{p} \vee q} \vee \overline{\bar{q} \vee r} \vee \bar{p} \vee r;$$

$$\begin{aligned}
&\equiv p\bar{q} \vee q\bar{r} \vee \bar{p} \vee r;\\
&\equiv (p \vee \bar{p})(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r)(\bar{r} \vee r); \quad (*)\\
&\equiv \text{И}\,(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r)\,\text{И};\\
&\equiv \bar{q} \vee \bar{p} \vee q \vee r; \qquad (**)\\
&\equiv (\bar{q} \vee q) \vee (\bar{p} \vee r);\\
&\equiv \text{И} \vee (\bar{p} \vee r);\\
&\equiv \text{И}.
\end{aligned}$$

В этом преобразовании мы получили одну дизъюнкцию (**), содержащую переменную q без отрицания и с отрицанием. Если же не упрощать формулу (*) заменой $p \vee \bar{p}$ и $\bar{r} \vee r$ через И (по закону исключенного третьего), то получим конъюнкцию дизъюнкций, каждая из которых содержит какую-нибудь переменную без отрицания и с отрицанием:

$$(p \Longrightarrow q)\,(q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r) \equiv ((p \vee \bar{p})\,(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r))\,((p \vee \bar{p})\,(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (\bar{r} \vee r)) \equiv (p \vee \bar{p} \vee q \vee r)\,(\bar{q} \vee \bar{p} \vee q \vee r)\,(p \vee \bar{p} \vee \bar{r} \vee r)\,(\bar{q} \vee \bar{p} \vee \bar{r} \vee r).$$

3. Метод косвенного доказательства (способ «от противного»). Допустим, что данная формула не является тождественно истинной. Тогда существует хотя бы один набор значений переменных, входящих в эту формулу, при котором она принимает значение Л. Если такой набор значений переменных удается найти, данная формула не является тождественно-истинной. Если же допущение о существовании такого набора значений переменных ведет к противоречию, данная формула тождественно-истинна.

Применим этот метод в качестве примера к формуле (11).

Допустим, что формула

$$(p \Longrightarrow q)\,(q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

не является тождественно-истинной. Тогда существует хотя бы один набор значений переменных (p, q, r), при котором она ложна, а следовательно, основание $(p \Longrightarrow q)\,(q \Longrightarrow r)$ истинно,

$$(p \Longrightarrow q)\,(q \Longrightarrow r) = \text{И} \qquad (1)$$

и следствие $p \Longrightarrow r$ ложно,

$$p \Longrightarrow r = \text{Л}. \qquad (2)$$

Из (2) следует $p = \text{И}$ (3) и $r = \text{Л}$ (4). Из (1) следует $p \Longrightarrow q = \text{И}$ (5) и $q \Longrightarrow r = \text{И}$ (6). Из (6) и (4) следует $q = \text{Л}$ (7), а из (7) и (5) — $p = \text{Л}$ (8). Мы получили противоречие ((3) и (8)).

Следовательно, наше допущение неверно и формула (11) тождественно-истинна.

Упражнения

99. Доказать, что формулы (1) — (10), приведенные выше, тождественно-истинны.

100. Какие из следующих формул являются тождественно-истинными:

а) $((p \Longrightarrow q) \vee (p \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow (q \vee r))$; б) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow ((r \Longrightarrow q) \Longrightarrow (pr \Longrightarrow q))$; в) $(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow ((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r))$; г) $\bar{p}q(p \vee r)$; д) $(p \Longrightarrow q)\, \bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$; е) $(p \Longrightarrow q)\, q \Longrightarrow p$; ж) $(pq \Longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r))$.

101. Доказать тождественную истинность формул:

а) $(p \vee q \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q)$; б) $(pq \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longrightarrow p)$; в) $(\bar{p} \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$; г) $(\bar{p} \Longrightarrow q\bar{q}) \Longrightarrow p$.

§ 13. АНАЛИЗ РАССУЖДЕНИЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА

13.1. Анализ рассуждений. Нашей конечной целью изучения начал логики высказываний является анализ рассуждений средствами этой логики.

Прежде всего условимся понимать слово «рассуждение» в довольно узком, но строго определенном смысле (в обыденной речи это слово применяется в весьма широком смысле).

Под *рассуждением* будем понимать *вывод* из некоторых предложений, называемых *посылками,* нового предложения — *заключения.*

Безусловно, этим мы еще не раскрыли полностью смысл слова «рассуждение», так как смысл слова «вывод» не более понятен и тоже нуждается в разъяснении. Мы лишь установили, что слова «рассуждение» и «вывод» будем понимать как синонимы, т. е. как слова, обозначающие один и тот же объект, являющийся предметом нашего изучения. Но все же мы что-то уже уточнили: рассуждение состоит из предложений (посылок и заключения).

Имея определенные знания о некоторых вещах, мы можем расширить их, не обращаясь больше к этим вещам, к опыту, лишь путем рассуждений. Из посылок, выражающих уже известные свойства вещей, мы выводим заключение о новом свойстве этих вещей.

Естественно возникает вопрос: какое рассуждение следует считать правильным? Очевидно, что рассуждение следует считать правильным лишь тогда, когда с его помощью *из истинных посылок нельзя получить ложное заключение.*

Рассуждение, допускающее получение ложного заключения из истинных посылок, не только не расширяет наши знания об изучаемых вещах, но доставляет нам о них неправильную информацию (ложные сведения). Поэтому такое рассуждение следует считать неправильным.

Правильность рассуждения является свойством его формы, структуры (структуры его посылок и заключения) и не зависит от его содержания (этим обусловлено название **«формальная логика»** для науки, изучающей **формы** человеческих рассуждений, отвлекаясь от их содержания).

Под *анализом рассуждения* будем понимать выделение его формы *(схемы рассуждения)* отвлечением от содержания и выяснение его правильности (невозможности получения по этой схеме из истинных посылок ложного заключения).

13.2. Правило вывода. Законы логики, выражаемые тождественно-истинными формулами логики высказываний, могут служить основой лишь для тех рассуждений, в которых учитывается только структура сложных высказываний (и не учитывается структура высказываний, рассматриваемых в логике высказываний как элементарные).

Отвлекаясь от содержания такого рассуждения, т. е. заменяя входящие в него элементарные высказывания переменными, мы получаем следующую схему рассуждения.

«*Из* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *(семантически) следует (семантически выводимо)* φ» (для краткости записи мы не указываем здесь переменные, входящие в состав формул, т. е. вместо $\varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ пишем просто φ_i).

Это означает: φ истинно по крайней мере при всех тех наборах значений переменных, входящих хотя бы в одну из этих формул, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$, при которых истинны все посылки $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Логическое следование φ из посылок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ мы обозначим кратко: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$.

Докажем важное предложение, устанавливающее связь между отношением логического следования заключения из посылок и тождественно-истинными формулами:

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow \varphi.$$

Действительно, если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$, то при всех наборах значений переменных, при которых истинны все посылки, истинно также заключение и поэтому $\vdash \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow \varphi$.

Обратно, если $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow \varphi$, то $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$, так как допущение, что φ не следует из посылок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, означает, что существует хотя бы один набор значений переменных, при котором все посылки $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, а следовательно, и их конъюнкция $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ истинны, и заключение φ ложно, поэтому формула $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow \varphi$ принимает значение Л, т. е. не является тождественно-истинной.

Вообще, утверждение типа: «Из высказываний со структурой, выражаемой формулами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, — посылок, следует высказывание со структурой, выражаемой формулой φ, — заключение» называется *правилом вывода*.

Правило вывода с посылками $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и заключением φ запишем так:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

(посылки — над чертой, заключение — под чертой).

Прежде всего мы проведем анализ некоторых рассуждений с целью выделения простейших правил вывода, основанных на некоторых из перечисленных выше (12.3) тождественно-истинных формул логики высказываний. Затем покажем, как эти правила вывода применяются в более сложных рассуждениях, в том числе в математических доказательствах (гл. 4).

13.3. Правило заключения. Проведем анализ следующего рассуждения: «Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; данный многоугольник — правильный; следовательно, в данный многоугольник можно вписать окружность».

Слово «следовательно» применяется обычно в рассуждении для отделения посылок от заключения. В данном рассуждении из двух посылок: «Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность» и «Данный многоугольник — правильный» выводится заключение «В данный многоугольник можно вписать окружность».

Ставится задача, отвлекаясь от содержания посылок и заключения, выяснить следует ли это заключение из данных посылок.

Чтобы отвлечься от содержания рассуждения, заменим элементарное высказывание «Данный многоугольник правильный» какой-нибудь переменной, например p, а элементарное высказывание «В него (в данный многоугольник) можно вписать окружность» — переменной q.

Таким образом, для установления правильности нашего рассуждения и любого рассуждения той же формы, но другого содержания нужно доказать, что

$$p \Longrightarrow q,\ p \vdash q.$$

Но по доказанному выше (13.2) предложению для этого достаточно доказать, что

$$\vdash (p \Longrightarrow q)\, p \Longrightarrow q.$$

Формула $(p \Longrightarrow q)\, p \Longrightarrow q$ содержится в нашем перечне тождественно-истинных формул (12.3) под номером (4).

Таким образом, закон логики, выраженный тождественно-истинной формулой (4), лежит в основе правила вывода

$$\frac{\varphi \Longrightarrow \psi,\ \varphi^{*}}{\psi},$$

* Подстановкой в (4) вместо p формулы φ, а вместо q формулы ψ, получаем $\vdash (\varphi \Longrightarrow \psi)\, \varphi \Longrightarrow \psi$.

называемого *правилом заключения* (далее будем писать кратко ПЗ).

Приведенное выше рассуждение, как и любое другое рассуждение, построенное по ПЗ, правильное. ПЗ находит широкое применение.

13.4. Правило отрицания. Рассмотрим следующее рассуждение: «Если данный многоугольник — правильный, то в него можно вписать окружность; в данный многоугольник нельзя вписать окружность; следовательно, данный многоугольник не есть правильный».

Используя введенные выше обозначения (13.3), получаем

$$p \Longrightarrow q,\ \overline{q} \vdash \overline{p}.$$

Для установления этого следования достаточно доказать, что

$$\vdash (p \Longrightarrow q)\,\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}.$$

Формула $(p \Longrightarrow q)\,\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ содержится в нашем перечне тождественно-истинных формул (12.3) под номером (5).

Таким образом, закон логики, выраженный тождественно-истинной формулой (5), лежит в основе правила вывода

$$\frac{\varphi \Longrightarrow \psi,\ \overline{\psi}}{\overline{\varphi}},$$

которое мы назовем *правилом отрицания* (далее будем писать кратко ПО).

13.5. Примеры неправильных рассуждений. Рассмотренные выше правила вывода (ПЗ и ПО) позволяют в истинной импликации $\varphi \Longrightarrow \psi$ из истинности основания φ заключать об истинности следствия ψ (ПЗ) и из ложности следствия ψ, или истинности его отрицания $\bar{\psi}$, о ложности основания, или истинности его отрицания $\bar{\varphi}$ (ПО).

Естественно возникает вопрос, а нельзя ли в истинной импликации $\varphi \Rightarrow \psi$ из ложности основания φ, или истинности его отрицания $\bar{\varphi}$ заключать о ложности следствия ψ, или истинности его отрицания $\bar{\psi}$, и из истинности следствия ψ — об истинности основания φ?

Иначе говоря, правильны ли рассуждения типа $p \Rightarrow q$, $\bar{p} \vdash \bar{q}$ и $p \Rightarrow q$, $q \vdash p$?

Нетрудно доказать, что формулы $(p \Rightarrow q)\,\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ и $(p \Rightarrow q)\,q \Rightarrow p$ не являются тождественно-истинными (см. упр. 100, д, е).

Следовательно, любые рассуждения такого типа неправильны.

Например, рассуждения:

I. «Если многоугольник — правильный, то в него можно вписать окружность; данный многоугольник не есть правильный, следовательно, в него нельзя вписать окружность» и

II. «Если диагонали данного параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб; в данном параллелограмме диагонали не взаимно перпендикулярны; следовательно, он не есть ромб» оба неправильны, так как имеют одну и ту же форму $p \Rightarrow q$, $\bar{p} \vdash \bar{q}$, а из посылок $p \Rightarrow q$ и $\bar{p}$, как мы уже знаем, не следует заключение $\bar{q}$.

Аналогично, рассуждения:

III. «Если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; в многоугольник можно вписать окружность; следовательно, он правильный» и

IV. «Если диагонали данного параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб; данный параллелограмм — ромб; следовательно, его диагонали взаимно перпендикулярны» оба неправильны, так как имеют одну и ту же форму «$p \Longrightarrow q,\ q \vdash p$», а из посылок $p \Longrightarrow q$ и q, как мы уже знаем, не следует заключение p.

13.6. Правило контрапозиции. Рассмотрим следующее рассуждение: «Если число рациональное, то оно представимо в виде отношения двух целых чисел; следовательно, если число не представимо в виде отношения двух целых чисел, то оно не является рациональным».

Заменим элементарное высказывание «Число рациональное» переменной p, а элементарное высказывание «Число представимо в виде отношения двух целых чисел» — переменной q.

Получаем следующую схему рассуждения:

$$p \Longrightarrow q \vdash \overline{q} \Longrightarrow \overline{p}.$$

Это рассуждение основано на законе контрапозиции ((6); 12.3):

$$\vdash (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$$

(даже на «более слабом» законе $\vdash (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$, который следует из (6), так как $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \equiv$ $\equiv ((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}))\ ((\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q))$.

Таким образом, закон контрапозиции (6) лежит в основе правила вывода

$$\frac{\varphi \Longrightarrow \psi}{\overline{\psi} \Longrightarrow \overline{\varphi}},$$

называемого *правилом контрапозиции* (ПК).

Это правило широко применяется в косвенных доказательствах (гл. 4).

13.7. Правило расширенной контрапозиции. Проведем анализ следующего рассуждения: «Если число делится на 2 и делится на 3, то оно делится на 6; следовательно, если число делится на 2 и не делится на 6, то оно не делится на 3».

Отвлечемся от конкретного содержания этого рассуждения. Заменим элементарные высказывания: «Число делится на 2» переменной p, «Число делится на 3» — q, «Число делится на 6» — r.

Тогда посылка запишется в виде формулы $pq \Rightarrow r$, а заключение — $p\bar{r} \Rightarrow \bar{q}$. Получаем следующую схему рассуждения:

$$pq \Rightarrow r \vdash p\bar{r} \Rightarrow \bar{q}.$$

Это следование основано на законе расширенной контрапозиции ((7), 12.3). Следовательно, рассматриваемое рассуждение, так же как любое другое рассуждение, построенное по этой же схеме, правильное.

Таким образом, закон расширенной контрапозиции (7) лежит в основе правила вывода

$$\frac{\varphi_1\varphi_2 \Rightarrow \varphi}{\varphi_1\bar{\varphi} \Rightarrow \bar{\varphi}_2},$$

называемого *правилом расширенной контрапозиции* (ПРК).

13.8. Правило силлогизма. Рассмотрим еще одно рассуждение:

«Если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны; если две стороны треугольника равны, то два угла его равны; следовательно, если треугольник равнобедренный, то два угла его равны».

Заменим элементарные высказывания: «Треугольник равнобедренный» переменной p, «Две стороны треугольника равны» — переменной q, «Два угла треугольника равны» — переменной r.

Получаем следующую схему рассматриваемого рассуждения:

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r.$$

Это следование обосновывается законом силлогизма ((11), 12.6):

$$\vdash (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

Таким образом, приведенное рассуждение, так же как и любое другое рассуждение, построенное по этой же схеме, правильное.

Закон силлогизма (11) лежит в основе правила вывода

$$\frac{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2,\ \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3}{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3},$$

называемого *правилом силлогизма* (ПС).

Упражнение

102. Обосновать следующие правила вывода (записать в виде тождественно-истинной формулы закон логики, лежащий в основе каждого из этих правил вывода):

$\dfrac{\varphi,\ \psi}{\varphi \vee \psi}$ — *введение дизъюнкции* (ВД);

$\dfrac{\varphi \vee \psi,\ \overline{\varphi}}{\psi}$ — *удаление дизъюнкции* (УД);

$\dfrac{\varphi,\ \psi}{\varphi\psi}$ — *введение конъюнкции* (ВК);

$\dfrac{\varphi\psi}{\varphi}$ — *удаление конъюнкции* (УК).

13.9. Общее определение логического следования. Приведем список выявленных выше (13.3 — 13.8 и упр. 102) правил вывода:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}\ (\text{ПЗ});\quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \overline{\psi}}{\overline{\varphi}}\ (\text{ПО});\quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\overline{\psi} \Rightarrow \overline{\varphi}}\ (\text{ПК});$$

$$\frac{\varphi_1\varphi_2 \Rightarrow \varphi}{\varphi_1\overline{\varphi} \Rightarrow \overline{\varphi_2}}\ (\text{ПРК});\quad \frac{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2,\ \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3}{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3}\ (\text{ПС});\quad \frac{\varphi,\ \psi}{\varphi \vee \psi}\ (\text{ВД});$$

$$\frac{\varphi \vee \psi,\ \overline{\varphi}}{\psi}\ (\text{УД});\quad \frac{\varphi,\ \psi}{\varphi\psi}\ (\text{ВК});\quad \frac{\varphi\psi}{\varphi}\ (\text{УК}).$$

(Можно, разумеется, ограничиться и меньшим числом правил вывода, но это менее удобно.)

Теперь можем дать более общее определение логического следования заключения из посылок, включающее и определение доказательства следования, принимая за основу имеющиеся правила вывода: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$, если существует конечная последовательность формул $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$, называемая *доказательством* или *выводом* φ из посылок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. Каждая ψ_i либо одна из посылок, либо получается из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода.

2. Последняя формула (ψ_k) есть φ.

Нетрудно заметить, что для каждого из рассуждений, приведенных в 13.3, 13.4, 13.6 — 13.8, может быть построена конечная последовательность формул, удовлетворяющая этим условиям.

Рассмотрим пример более сложного рассуждения:

«Если прямая не имеет с плоскостью общей точки, то она параллельна плоскости; если прямая имеет две (различные) общие точки с плоскостью, то она лежит в плоскости; прямая непараллельна плоскости и не лежит в ней; следовательно, прямая имеет общую точку с плоскостью и не имеет двух различных общих точек с нею».

Заменим элементарные высказывания, входящие в это рассуждение, переменными: «Прямая не имеет с плоскостью общей точки» — p; «Она (прямая) параллельна плоскости» — q; «Прямая имеет две (различные) общие точки с плоскостью» — r; «Она (прямая) лежит в плоскости» — s.

Получаем следующую схему рассуждения:

$$p \Longrightarrow q,\ r \Longrightarrow s,\ \bar{q}\bar{s} \vdash \bar{p}\bar{r}.$$

Построим доказательство этого следования (вывод формулы $\bar{p}\bar{r}$ из посылок $p \Longrightarrow q$, $r \Longrightarrow s$, $\bar{q}\bar{s}$), т. е. конечную последовательность формул, удовлетворяющую условиям 1 — 2.

(Доказательство запишем в двух столбцах: в левом — конечная последовательность формул, удовлетворяющая условиям 1 — 2, т. е. само доказательство; в правом — указание, является ли соответствующая формула посылкой (п), или по какому правилу вывода и из каких предшествующих формул последовательности она получена.)

1. $\bar{q}\bar{s}$;	1. п;
2. $\bar{q}$;	2. УК (1);
3. $\bar{s}$;	3. УК (1);
4. $p \Longrightarrow q$;	4. п;
5. $\bar{p}$;	5. ПО (4, 2);
6. $r \Longrightarrow s$;	6. п;
7. $\bar{r}$;	7. ПО (6, 3);
8. $\bar{p}\bar{r}$;	8. ВК (5, 7).

13.10. Теорема дедукции. Широкое применение в доказательствах находит *теорема дедукции*: если $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \vdash \varphi$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi_n \Longrightarrow \varphi$ (ТД).

Действительно, допустим, что $\varphi_n \Longrightarrow \varphi$ не следует из посылок $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Это означает (согласно первому определению следования (13.2)), что существует хотя бы один набор значений переменных, при котором посылки $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ истинны, а формула $\varphi_n \Longrightarrow \varphi$ ложна, т. е. φ_n истинна, а φ ложна. Мы получили, что при этом наборе значений переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ истинны, а φ ложна, т. е. φ не следует из посылок $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$, что противоречит условию.

Приведем несколько примеров применения ТД.

1) ТД позволяет обосновать следование

$$p \Longrightarrow q,\ q \Longrightarrow r \vdash p \Longrightarrow r \tag{1}$$

проще, чем установлением тождественной истинности формулы (11), (12.3), выражающей закон силлогизма (12.4).

Согласно ТД, для доказательства (1) достаточно доказать

$$p \Longrightarrow q,\ q \Longrightarrow r,\ p \vdash r. \tag{2}$$

Доказательство.

1. $p \Longrightarrow q$;	1. п;
2. p;	2. п;
3. q;	3. ПЗ (1, 2);
4. $q \Longrightarrow r$;	4. п;
5. r;	5. ПЗ (4, 3).

2) Рассмотрим следующее рассуждение: «Если две плоскости параллельны, то они не имеют общей точки; если две плоскости пересекаются, то они имеют общую

прямую; но две плоскости параллельны или пересекаются; следовательно, две плоскости не имеют общей точки или имеют общую прямую».

Заменим элементарные высказывания, входящие в это рассуждение, переменными: «две плоскости параллельны» — p; «они (плоскости) не имеют общей точки» — q; «две плоскости пересекаются» — r; «они (плоскости) имеют общую прямую» — s.

Тогда схема рассуждения запишется так:

$$p \Longrightarrow q,\ r \Longrightarrow s,\ p \vee r \vdash q \vee s$$

или, так как $q \vee s \equiv \overline{q} \Longrightarrow s$,

$$p \Longrightarrow q,\ r \Longrightarrow s,\ p \vee r \vdash \overline{q} \Longrightarrow s.$$

По ТД достаточно доказать, что

$$p \Longrightarrow q,\ r \Longrightarrow s,\ p \vee r,\ \overline{q} \vdash s.$$

Доказательство.

1. $p \Longrightarrow q$;	1. п;
2. $\overline{q}$;	2. п;
3. $\overline{p}$;	3. ПО (1, 2);
4. $p \vee r$;	4. п;
5. r;	5. УД (4, 3);
6. $r \Longrightarrow s$;	6. п;
7. s;	7. ПЗ (6, 5).

3) С помощью ТД правило контрапозиции (ПК) сводится к правилу отрицания (ПО).

Действительно, по ТД для установления следования

$$p \Longrightarrow q \vdash \overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$$

достаточно доказать, что

$$p \Longrightarrow q, \ \bar{q} \vdash \bar{p},$$

а это следование осуществляется по ПО:

1. $p \Longrightarrow q$;	1. п;
2. $\bar{q}$;	2. п;
3. $\bar{p}$;	3. ПО (1, 2).

Далее (гл. 4) будет показано применение ТД в математических доказательствах.

Упражнения

103. Дать обоснованные ответы на вопрос: следует ли из посылок заключение?

Посылки	Заключение
1	2
а) 1. Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. 2. Число оканчивается нулем	Число делится на 5
б) 1. Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. 2. Число не оканчивается нулем	Число не делится на 5
в) 1. Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. 2. Число делится на 5	Число оканчивается нулем

1	2
г) 1. Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5.	
2. Число не делится на 5	Число не оканчивается нулем
д) 1. Если число целое, то оно рациональное.	
2. Если число — несократимая дробь, то оно не есть целое	Если число — несократимая дробь, то оно не есть рациональное число
е) 1. Если число — дробь, то оно рациональное.	
2. Если число целое, то оно рациональное	Если число целое, то оно дробь
ж) 1. Если посылки истинны и рассуждение правильное, то и заключение истинно.	
2. Заключение ложно	Посылки ложны или рассуждение неправильное
з) 1. Если $a=0$ или $b=0$, то $ab=0$.	
2. $ab \neq 0$	$a \neq 0$ и $b \neq 0$
и) 1. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$.	
2. $ab=0$	$a=0$ или $b=0$
к) 1. $a \geqslant 0$.	
2. $a \neq 0$	$a > 0$

104. Записать правила вывода, основанные на законах де Моргана.

105. ПРК имеет более общую форму

$$\frac{p_1 \ldots p_{k-1} p_k p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow q}{p_1 \ldots p_{k-1} \bar{q} p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow \bar{p}_k}.$$

Обосновать это правило вывода различными способами:

а) установлением тождественной истинности формулы

$$(p_1 \ldots p_{k-1} p_k p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p_1 \ldots p_{k-1} \bar{q} p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow \bar{p}_k);$$

б) доказательством следования

$$p_1 \ldots p_{k-1} p_k p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow q \vdash p_1 \ldots p_{k-1} \bar{q} p_{k+1} \ldots p_n \Rightarrow \bar{p}_k$$

с использованием ТД.

106. Записать правило вывода, основанное на законе двойного отрицания.

107. Установить, имеют ли место следования:

а) $p \vee q,\ \ p \vdash \bar{q}$; б) $p \vee q \vee r,\ \ \bar{p}\bar{q} \vdash r$; в) $p \vee q \vee r,\ \ p \vdash \bar{q}\bar{r}$; г) $p \vee q \vee r,\ \ \bar{p} \vdash q \vee r$.

108. Установить правильность следующего рассуждения: «Если целое число больше 1, то оно простое или составное; если целое число больше 2, то оно больше 1; если целое число больше 2 и четное, то оно не является простым; следовательно, если целое число больше 2 и четное, то оно составное». (Построить вывод заключения из посылок с использованием ТД.)

109. Установить правильность следующего рассуждения: «Если данное целое число делится на 5, то оно оканчивается нулем или цифрой 5; данное целое число делится на 5 и не оканчивается нулем; следовательно, оно оканчивается цифрой 5».

110. Провести анализ рассуждения: «Прямые a и b или параллельны, или пересекаются, или скрещиваются; прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются; если прямые a и b лежат в одной плоскости, то они не скрещиваются»; следовательно, $a \parallel b$».

111. Провести анализ следующего рассуждения: «Вещественное число — рациональное или иррациональное; если вещественное число иррациональное, то оно представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби; неверно, что вещественное число представимо в виде бесконечной десятичной периодической дроби и в виде бесконечной десятичной непериодической дроби; следовательно, если вещественное число представимо в виде бесконечной десятичной периодической дроби, то оно рациональное».

112. Обосновать правило вывода

$$\frac{p \Longrightarrow q, \quad q \Longrightarrow r, \quad r \Longrightarrow s}{p \Longrightarrow s}$$

(построить вывод заключения из посылок) и привести пример рассуждения, построенного по этому правилу.

Глава 3. ПРЕДИКАТЫ

§ 14. НЕДОСТАТОЧНОСТЬ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

14.1. Рассуждения, не анализируемые средствами логики высказываний. Средствами логики высказываний мы анализировали некоторые типы рассуждений (гл. 2, § 13). Мы отметили при этом, что если при выводе одних высказываний из других учитывается внутренняя структура элементарных высказываний, то для выяснения правильности такого рассуждения средства логики высказываний оказываются недостаточными. Например, правильность рассуждения

«Всякое целое число — рациональное число; 1 — целое число; следовательно, 1 — рациональное число» (а)

нельзя установить средствами логики высказываний, так как в нем посылки и заключение с точки зрения этой логики — элементарные высказывания, рассматриваемые как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры.

Нетрудно заметить, что рассуждение

«Всякий ромб — параллелограмм; *ABCD* — ромб; следовательно, *ABCD* — параллелограмм», (б),

хотя отличается по содержанию от рассуждения (а), имеет ту же структуру и следование заключения из посылок в этих рассуждениях определяется именно их структурой, а не содержанием.

Однако на языке логики высказываний мы не можем отделить логическую структуру этих рассуждений от их конкретного содержания, не можем выразить схему этих рассуждений. Если мы попытались бы это сделать, заменяя каждое элементарное высказывание переменной, то каждое из рассуждений (а) — (б) приняло бы форму «Из p и q следует r».

Совершенно очевидно, что такое представление рассуждений не дает нам возможность выяснить, действительно ли следует заключение r из посылок p и q, так как в нем не отражена структура посылок и заключения.

Таким образом, логика высказываний не дает нам средств для достаточно тонкого анализа рассуждений. Это объясняется тем, что логика высказываний построена на весьма существенном ограничении: она ограничивается сведением сложных высказываний к элементарным, а последние рассматривает как целые, далее нерасчленяемые объекты, хотя они не являются самыми простыми элементами рассуждений и обладают внутренней структурой, играющей важную роль в выводах. Поэтому на языке логики высказываний мы не можем получить все те средства вывода, которые необходимы, в частности, для построения различных математических теорий.

Возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является *логика предикатов*, содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

14.2. Расчленение элементарных высказываний. Недостаточность логики высказываний выражается, с другой стороны, тем, что она, не расчленяя элементарные высказывания, не отличает высказывание, выражающее *свойство* предмета, от высказывания, выражающего *отношение* между предметами, не дает нам средств для выражения свойств и отношений.

В этом же смысле недостаточна и традиционная формальная логика, хотя она и расчленяет элементарное высказывание на *субъект* (буквально — подлежащее, хотя оно может играть и роль дополнения) и *предикат* (буквально — сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — то, о чем что-то утверждается или отрицается в высказывании; предикат — то, что утверждается или отрицается о субъекте.

Например, в высказывании «ромб есть параллелограмм», «ромб» — субъект, «параллелограмм» — предикат («есть» — связка). Это высказывание истолковывается как утверждение о том, что ромб обладает свойством «быть параллелограммом» или, что множество ромбов включается в множество параллелограммов.

Такое расчленение элементарного высказывания на субъект и предикат, характерное для традиционной логики, достаточно лишь в тех случаях, когда элементарное высказывание выражает свойство предмета, но не пригодно для случая, когда оно выражает отношение между предметами.

Например, элементарные высказывания: «Число 2 меньше числа 3», «Точка A лежит между точками B и C» и т. п. уже нельзя представить в виде «S есть P», где S — субъект, P — предикат. Можно, конечно, считать, например во втором из этих примеров, A субъектом, а свойство «лежит между B и C» — предикатом; но такое представление, во-первых, неоднозначно (ведь можно понимать приведенное высказывание как высказывание о B или о C) и, во-вторых, при этом происходит далеко не всегда желательное «склеивание» различных субъектов (в данном случае — B и C) в один предикат.

Логика предикатов также исходит из расчленения элементарных высказываний на субъект (или субъекты) и предикат, но это расчленение осуществляется не так, как в традиционной логике.

§ 15. ПРЕДИКАТЫ

15.1. Свойство. Одноместный предикат. Рассмотрим в качестве примера свойство «быть простым числом», которым может обладать или не обладать всякое натуральное число.

Высказывание «5 — простое число», утверждающее, что число 5 обладает этим свойством, истинно. Высказывание «4 — простое число», утверждающее, что число 4 обладает этим свойством, ложно. Если мы заменим в этих высказываниях конкретные числа (5, 4) переменной x для чисел из множества N, то получим высказывательную форму «x — простое число», обращающуюся в истинное или ложное высказывание при подстановке вместо x какого-нибудь ее значения из N:

x	«x—простое число»
1	Л
2	И
3	И
4	Л
5	И
6	Л
. . .	. . . . . .

Как видно, эта высказывательная форма определяет отображение

$$N \xrightarrow{P} \{\text{И, Л}\},$$

или функцию P: $x \longrightarrow P(x)$, $x \in N$, $P(x) \in \{\text{И, Л}\}$, определенную на множестве N и принимающую значения из множества $\{\text{И, Л}\}$.

Такая функция называется *логической функцией одной предметной переменной* или *одноместным предикатом.*

Одноместный предикат обозначается функциональным символом, например P, иногда с одним пустым местом: $P(\ )$, чтобы подчеркнуть, что P обозначает *одноместный* предикат; символ $P(x)$ обозначает одноместную высказывательную форму (в нашем примере «x — простое число»), выражающую логическую функцию предметной переменной x; буква x применяется здесь в качестве *предметной* переменной, т. е. переменной для предметов — элементов некоторого множества, области значений переменной, вместо которой можно подставить имена этих элементов (в нашем примере x — переменная для чисел из N, или *числовая* переменная).

Область значений предметной переменной x (в нашем примере N) называется *областью определения* предиката P.

В принятых обозначениях $P(5)$ обозначает высказывание «5 — простое число», $P(4)$ — высказывание «4 — простое число», т. е.

$$P(5) = \text{И}; \quad P(4) = \text{Л}.$$

Предикат P разбивает область определения на два подмножества, на одном из которых он принимает значение И (каждый элемент из этого подмножества обращает его в истинное высказывание, обладает свойством P), на другом — значение Л (каждый элемент из этого подмножества обращает его в ложное высказывание, не обладает свойством P). В нашем примере числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... принадлежат первому подмножеству, так как обращают высказывательную форму $P(x)$ в истинное высказывание; числа 1, 4, 6, 8, 9, 10, ... принадлежат второму, так как обращают эту высказывательную форму в ложное высказывание.

То из подмножеств области определения предиката P, на котором он принимает значение И (высказывательная форма $P(x)$ обращается в истинное высказывание), называется *областью истинности* этого предиката.

Введенное раньше (гл. 1, 1.3) обозначение $\underset{x}{M}[P(x)]$ для множества, определяемого характеристическим свойством P (множества всех тех и только тех x, которые обладают свойством P), по существу есть обозначение области истинности предиката P.

В нашем примере, где предикат P обозначает свойство «быть простым числом», $P(x)$ — высказывательную форму «x — простое число», $\underset{x}{M}[P(x)]$ обозначает множество всех простых чисел.

Рассмотрим другой пример. Пусть P обозначает свойство «быть столицей БССР». Тогда $P(x)$ обозначает высказывательную форму «Город x — столица БССР», определяющую одноместный предикат P; P(Минск) обозначает истинное высказывание «Город Минск — столица БССР», т. е. P(Минск) = И, а выражение P(Могилев) — ложное высказывание «Город Могилев — столица БССР», т. е. P(Могилев) = Л. В этом случае область определения предиката P — множество городов БССР, т. е. вместо предметной переменной x разрешается подставлять название любого города БССР, а область истинности состоит из одного города:

$$\underset{x}{M}[P(x)] = \{\text{Минск}\}.$$

Под «$P(\ )$» можно понимать определенный, конкретный или произвольный, одноместный предикат. В первом случае буква P применяется в качестве *предикатной постоянной*, во втором — в качестве *предикатной переменной* (или переменной для предикатов), значениями которой являются различные конкретные одноместные предикаты.

Таким образом, всякое свойство может быть представлено в виде одноместного предиката (логической функции одной предметной переменной).

15.2. Отношение. Многоместный предикат. Выше (15.1) приведены примеры одноместных предикатов, выражающих свойства предметов. Естественным обобщением понятия одноместного предиката является понятие *многоместного* предиката, с помощью которого выражаются *отношения* между предметами.

Приведем несколько примеров отношений и их представления в виде многоместных предикатов.

1) Примером *бинарного* отношения (отношения между двумя предметами) является отношение «меньше» ($<$). Пусть это отношение введено в множестве C целых чисел. Оно может быть охарактеризовано логической функцией, определенной двуместной высказывательной формой $x < y$, где $x,\ y \in C$. Действительно, каждой паре $(x,\ y) \in C^2$ ставится в соответствие И, если $x < y$, и Л в противном случае. Если вместо переменных x, y в высказывательной форме $x < y$ подставить пару значений (2, 3), получим истинное высказывание $2 < 3$; если же подставить пару (3, 2), получим ложное высказывание $3 < 2$.

Как видно, высказывательная форма $x < y$, где $x,\ y \in C$, определяет отображение $C^2 \xrightarrow{P} \{\text{И, Л}\}$, или функцию

$$P:(x,\ y) \longrightarrow P(x,\ y),\ (x,\ y) \in C^2,\ P(x,\ y) \in \{И,\ Л\},$$

определенную на множестве C^2 и принимающую значения из множества $\{И, Л\}$. Такая функция называется *логической функцией двух предметных переменных* или *двуместным предикатом*. Этот предикат разбивает множество C^2 на два подмножества, на одном из которых он принимает значение И, на другом — значение Л. Первое из этих подмножеств, *область истинности* предиката, мы обозначаем символом $\underset{(x,\ y)}{M}[P(x,\ y)]$.

Отношение «меньше» в конечном множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ представляется в виде логической функции $A^2 \xrightarrow{P} \{И, Л\}$, которая может быть задана таблицей:

x \ y	1	2	3	4	5
1	Л	И	И	И	И
2	Л	Л	И	И	И
3	Л	Л	Л	И	И
4	Л	Л	Л	Л	И
5	Л	Л	Л	Л	Л

Область истинности этого предиката — подмножество A^2, следовательно, также конечное множество

$$\underset{(x,\,y)}{M}[P(x,\ y)] = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5)\}.$$

Двуместный предикат P обозначают также функциональным символом P с двумя пустыми местами: $P(\,,)$. Символ $P(x,\ y)$ обозначает двуместную высказывательную форму, выражающую этот предикат (или бинарное отношение). Иногда говорят «предикат $P(x,\ y)$» в смысле «предикат, определяемый высказывательной формой $P(x,\ y)$».

Мы рассмотрели выше бинарное отношение («меньше») между элементами одного множества ($\boldsymbol{C}$ или A). Часто рассматривается бинарное отношение между элементами двух различных множеств.

Пусть, например, $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ и $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Бинарное отношение «x делит y», где $x \in A$ и $y \in B$, представляет собой двуместный предикат $A \times B \xrightarrow{P} \{\text{И},\ \text{Л}\}$; область истинности которого

$$\underset{(x,\,y)}{M}[P(x,\ y)] = \{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (3,\ 6)\}.$$

Таким образом, бинарное отношение между элементами двух множеств A и B определяется как двуместный предикат, или логическая функция с областью определения $A \times B$ («логическая», потому что принимает значения из $\{\text{И},\ \text{Л}\}$). Иногда бинарное отношение отождествляется с областью истинности этого предиката, т. е. определяется как подмножество $A \times B$.

Мы будем рассматривать бинарное отношение как двуместный предикат.

Обычно в математике двуместные предикаты (бинарные отношения) $P(x,\ y)$ обозначаются через xPy. Например, вместо $<(x, y)$ мы пишем $x<y$, вместо $=(x, y)$—$x=y$. Мы будем пользоваться этими обычными обозначениями для встречающихся в математике бинарных отношений.

2) Примером *тернарного* отношения (отношения между тремя предметами) является отношение между тремя точками, лежащими на одной прямой, выражаемое словом «между».

Пусть x, y, z — переменные для точек, лежащих на одной прямой. Через $M(x, y, z)$ обозначим высказывательную форму «точка x лежит между точками y и z». При подстановке вместо переменных x, y, z названий трех определенных точек (лежащих на одной прямой) $M(x, y, z)$ обращается в истинное или ложное высказывание.

Таким образом, $M(x, y, z)$ определяет некоторую логическую функцию трех предметных переменных (в данном случае — переменных для точек) или *трехместный предикат*, определенный на множестве T^3 всевозможных троек элементов множества T точек прямой:

$$T^3 \xrightarrow{\quad M \quad} \{\text{И, Л}\}.$$

Рассмотрим еще один пример трехместного предиката.

Пусть x, y, z — переменные для натуральных чисел, а $S(x, y, z)$ — высказывательная форма $x+y=z$. Если вместо переменных x, y, z подставить какие-нибудь их значения, то получим истинное или ложное высказывание. Например, $S(2, 3, 5) = \text{И}$ ($2+3=5$ — истинное высказывание), а $S(2, 3, 6) = \text{Л}$ ($2+3=6$ — ложное высказывание). Таким образом, трехместная высказывательная форма $S(x, y, z)$ определяет на множестве N^3 всевозможных троек натуральных чисел (элементов из N) логическую функцию, или трехместный предикат:

$$N^3 \xrightarrow{\quad S \quad} \{\text{И, Л}\}.$$

3) Вообще *n-арное отношение* (отношение между n предметами) может быть определено как логическая функция n предметных переменных, или *n-местный предикат*:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{\quad P \quad} \{И,\ Л\},$$

или

$$P: (x_1,\ \ldots,\ x_n) \longrightarrow P(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

$$x_i \in A_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ P(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \{И,\ Л\}.$$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, т. е. $x_i \in A$ для всех $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то областью определения предиката является множество A^n:

$$A^n \xrightarrow{\quad P \quad} \{И,\ Л\}.$$

Примером n-местного предиката является логическая функция, определяемая уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$, где $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — постоянные, имена вещественных чисел, а $x_1,\ \ldots,\ x_n$ — переменные для вещественных чисел. Область определения этого предиката — $\boldsymbol{D}^n$, область значений — $\{И,\ Л\}$ (каждой n-ке вещественных чисел ставится в соответствие истинное или ложное высказывание):

$$\boldsymbol{D}^n \xrightarrow{\quad P \quad} \{И,\ Л\}.$$

Область истинности этого предиката—подмножество $\boldsymbol{D}^n$, на котором предикат принимает значение И — множество решений уравнения.

Совершенно очевидно, что если в n-местной высказывательной форме $P(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, определяющей n-местный предикат, подставить вместо k переменных $(k < n)$ их значения, то мы получим $n - k$-местную высказывательную форму, выражающую $n - k$-местный предикат. Если распространить эту процедуру на случай $k = n$, получим 0-местный предикат. Но в этом случае получается высказывание. Следовательно, высказывание можно рассматривать как 0-местный предикат, принимающий только одно значение (И или Л), не зависящее от значений каких-либо предметных переменных.

15.3. Общее понятие предиката. Приведенные выше (15.1, 15,2) примеры показывают, что всякое свойство представимо в виде логической функции одной предметной переменной, всякое отношение — в виде логической функции нескольких предметных переменных.

Определение. *Логическая функция (т. е. функция, принимающая значения из {И, Л}) одной или нескольких предметных переменных называется предикатом.*

До сих пор мы пользовались интуитивными понятиями свойства и отношения. Теперь мы можем уточнить их с помощью математического понятия предиката. Понятие «свойство» мы отождествим с понятием «одноместный предикат», понятие «отношение» — с понятием «многоместный предикат» («бинарное отношение» — «двуместный предикат», «тернарное отношение» — «трехместный предикат» и т. д.).

Упражнения

113. Записать область истинности предиката $P(x)$: «x есть простое число», определенного на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

114. Бинарное отношение (двуместный предикат) xPy: «x делит y» определено на множестве A^2, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Составить прямоугольную таблицу, задающую этот предикат, и определить его область истинности.

115. Доказать, что на n-элементном множестве можно определить 2^n различных одноместных предикатов.

116. Доказать, что если A — n-элементное множество, а B —

k-элементное множество, то можно определить 2^{nk} двуместных предикатов (различных) типа $A \times B \xrightarrow{P} \{И, Л\}$.

117. На множестве $\{0, 1\}^3$ определен предикат

$$P(x, y, z): \quad xy = z.$$

Составить таблицу значений этого предиката и определить его область истинности.

118. Двуместный предикат, выражаемый уравнением $x + y = 10$, определен на множестве A^2, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Составить таблицу значений этого предиката и определить его область истинности. Повторить то же для предиката, определяемого неравенством $x + y < 10$.

119. Двуместный предикат $x < y$ определен на множестве $A \times B$, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Составить таблицу значений этого предиката и определить его область истинности. То же повторить для предиката $x \leqslant y$, определенного на $A \times B$.

§ 16. ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

16.1. Операции логики высказываний над предикатами. Предикаты, так же, как высказывания, принимают значения И и Л, поэтому к ним применимы все операции логики высказываний. С помощью этих операций из элементарных предикатов (т. е. таких, которые не расчленяются на другие предикаты) формируются сложные предикаты, так же, как в логике высказываний из элементарных высказываний формируются сложные.

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов. (Это рассмотрение сохраняется и для многоместных предикатов.)

Пусть на некотором множестве A определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$. Тогда на этом же множестве определены и предикаты:

$$\overline{P}(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \vee Q(x),$$
$$P(x) \Longrightarrow Q(x),\ P(x) \Longleftrightarrow Q(x),$$

смысл которых получается из определений соответствующих операций над высказываниями.

1. $\overline{P}(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях x из A, при которых $P(x)$ обращается в ложное высказывание, т. е. область истинности предиката $\overline{P}(x)$ является дополнением до A области истинности предиката $P(x)$:

$$\underset{x}{M}[\overline{P}(x)] = \underset{x}{\overline{M}}[P(x)]$$

(заштрихована на рис. 21).

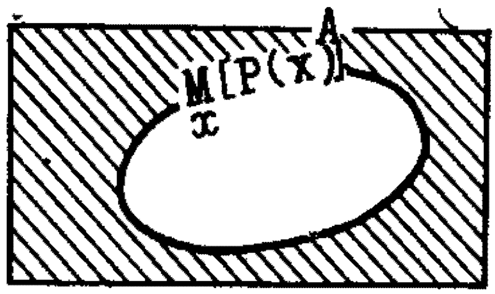


Рис. 21

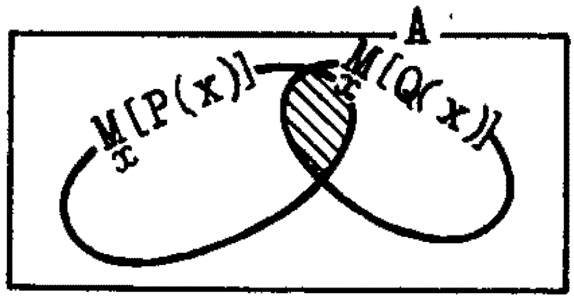


Рис. 22

2. $P(x) \wedge Q(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях x из A, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ обращаются в истинные высказывания, т. е. область истинности $P(x) \wedge Q(x)$ — пересечение областей истинности составляющих предикатов $P(x)$ и $Q(x)$:

$$\underset{x}{M}[P(x) \wedge Q(x)] = \underset{x}{M}[P(x)] \cap \underset{x}{M}[Q(x)]$$

(заштрихована на рис. 22).

3. $P(x) \vee Q(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях x из A, при которых хотя бы один из предикатов $P(x)$ или $Q(x)$ обращается в истинное высказывание, т. е. область истин-

ности $P(x) \vee Q(x)$ — объединение областей истинности составляющих предикатов $P(x)$ и $Q(x)$:

$$\underset{x}{M}[P(x) \vee Q(x)] = \underset{x}{M}[P(x)] \cup \underset{x}{M}[Q(x)]$$

(заштрихована на рис. 23).

4. $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ обращается в ложное высказывание при всех тех и только тех значениях x из A, при которых $P(x)$ обращается в истинное высказывание, а $Q(x)$ — в ложное.

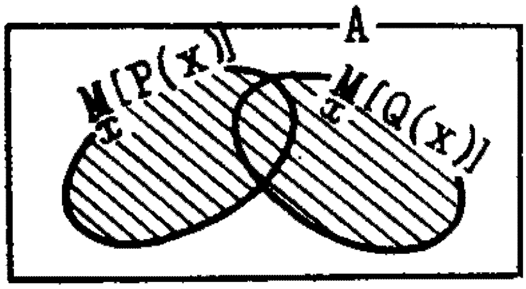


Рис. 23

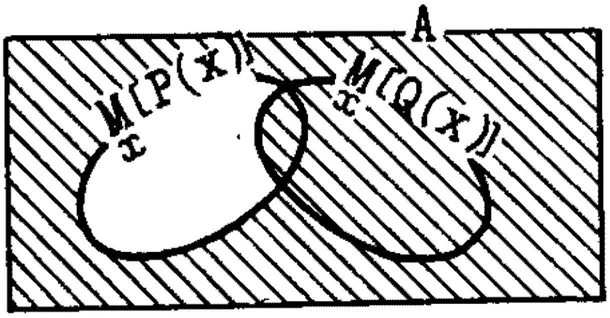


Рис. 24

Следовательно, так же, как в логике высказываний,

$$P(x) \Longrightarrow Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

(знак $\equiv$ применяется в том же смысле, что и в логике высказываний) и

$$\underset{x}{M}[P(x) \Longrightarrow Q(x)] = \underset{x}{M}[\overline{P}(x) \vee Q(x)] =$$

$$= \underset{x}{M}[\overline{P}(x)] \cup \underset{x}{M}[Q(x)] = \underset{x}{\overline{M}}[P(x)] \cup \underset{x}{M}[Q(x)]$$

(область истинности предиката $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ заштрихована на рис. 24).

5. $P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях x из A, при которых

$P(x)$ и $Q(x)$ обращаются оба в истинные высказывания или оба в ложные высказывания.

Поскольку операции сохраняют тот же смысл, что и в логике высказываний, то сохраняются и все их свойства, в частности

$$P(x) \Longleftrightarrow Q(x) \equiv (P(x) \Longrightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Longrightarrow P(x)).$$

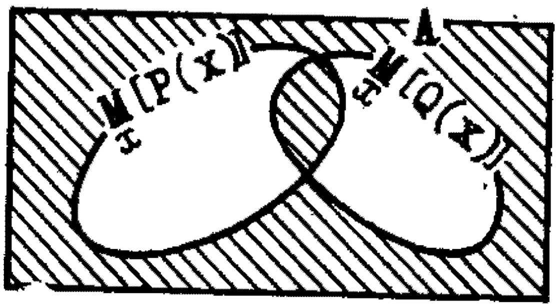


Рис. 25

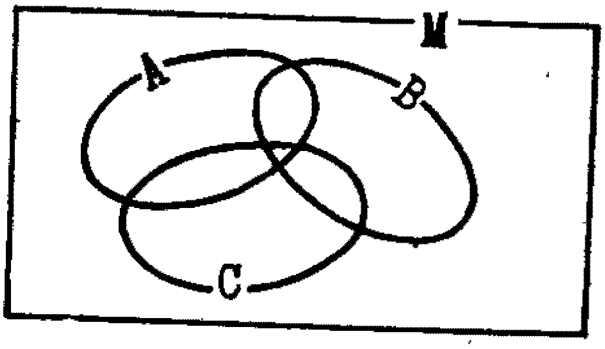


Рис. 26

Поэтому

$$\underset{x}{M}[P(x) \Longleftrightarrow Q(x)] = \underset{x}{M}[P(x) \Longrightarrow Q(x)] \cap \underset{x}{M}[Q(x) \Longrightarrow P(x)]$$

$$= (\underset{x}{\overline{M}}[P(x)] \cup \underset{x}{M}[Q(x)]) \cap (\underset{x}{\overline{M}}[Q(x)] \cup \underset{x}{M}[P(x)])$$

(область истинности предиката $P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ заштрихована на рис. 25).

Упражнения

120. На диаграмме (рис. 26): $A = \underset{x}{M}[A(x)]$; $B = \underset{x}{M}[B(x)]$; $C = \underset{x}{M}[C(x)]$, т. е. области истинности обозначаются теми же буквами, что и предикаты. Заштриховать область истинности предиката:

а) $A(x) \vee B(x) \vee C(x)$; б) $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$; в) $A(x) \wedge B(x) \wedge$ $\wedge \overline{C}(x)$; г) $A(x) \wedge \overline{B}(x) \wedge C(x)$; д) $\overline{A}(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$; е) $A(x) \wedge$

$\wedge \overline{B}(x) \wedge \overline{C}(x)$; ж) $\overline{A}(x) \wedge B(x) \wedge \overline{C}(x)$; з) $\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x) \wedge C(x)$; и) $\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x) \wedge \overline{C}(x)$. Выразить области истинности предикатов а) — и) через области истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.

121. Записать предикаты, области истинности которых заштрихованы на рис. 27, на котором применяются обозначения, описанные в упр. 120.

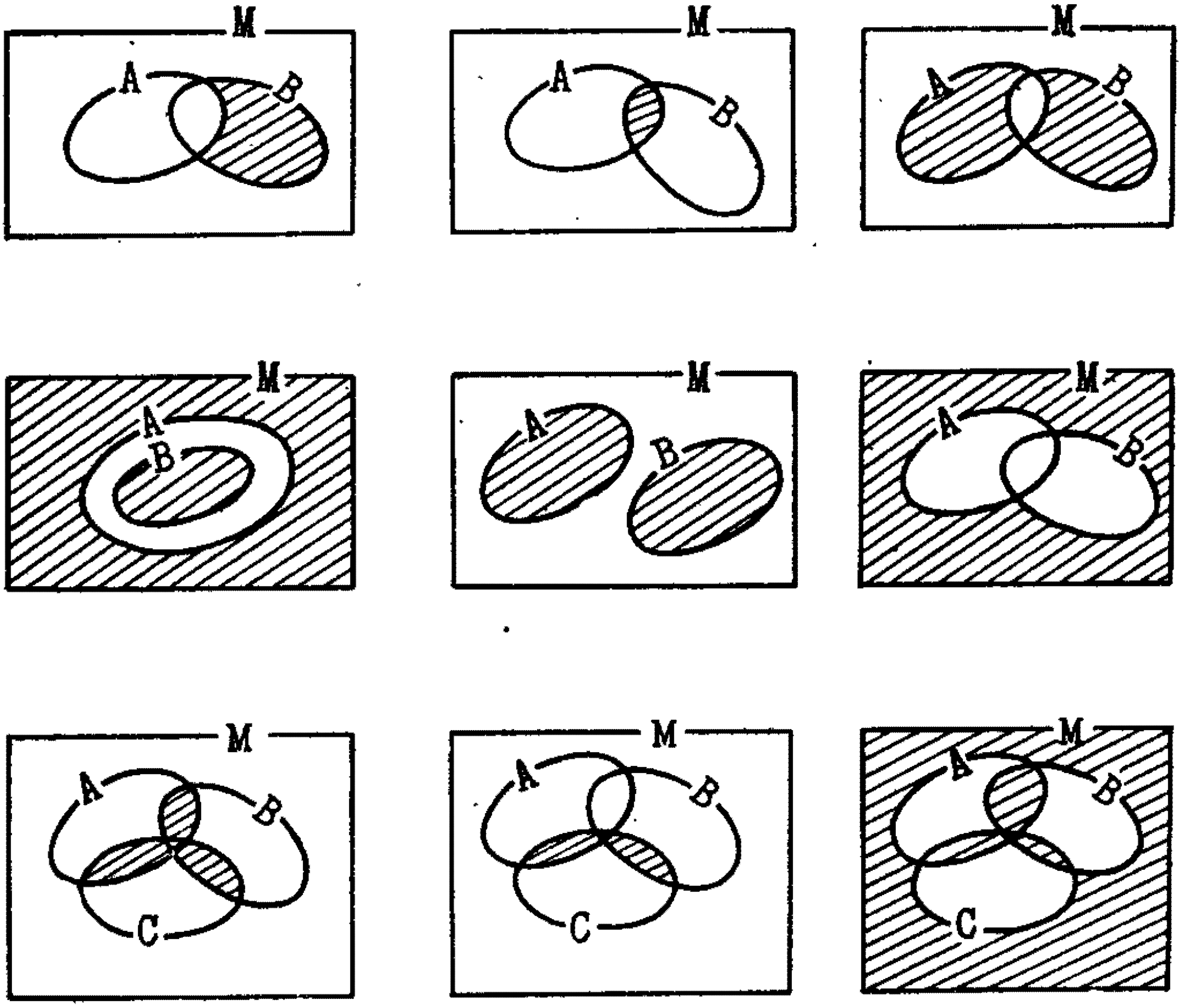


Рис. 27

122. Предикаты $A(x)$ и $B(x)$ определены на некотором множестве M. В каком отношении должны находиться области истинности A и B этих предикатов, чтобы:

1) $A(x) \wedge B(x)$ принимал значение И: а) для некоторых x из M; б) для всех x из A; в) для всех x из B; г) ни для одного значения x из M (принимал значение Л при всех значениях x из M);

2) $A(x) \Longrightarrow B(x)$ принимал значение И: а) для всех x из M; б) ни для одного значения x из M.

16.2. Кванторы. Операции логики высказываний преобразуют предикаты в предикаты. Рассмотрим теперь операции, преобразующие предикаты в высказывания.

Одной из таких операций является *подстановка* вместо предметных переменных их значений.

Если в $P(x_1, \ldots, x_n)$, где P — предикатная постоянная, а $x_1, \ldots, x_n$ — предметные переменные, подставить вместо всех предметных переменных какие-нибудь их значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, истинное или ложное, относящееся к конкретной n-ке предметов $(a_1, \ldots, a_n)$.

Например, если в двуместном предикате «x делится на y» подставить вместо переменных x, y пару чисел (6, 2), получим истинное высказывание «6 делится на 2», если же подставить пару чисел (5, 2), то получим ложное высказывание «5 делится на 2». Каждое из этих высказываний относится к определенной паре чисел.

Из предикатов можно строить не только высказывания, относящиеся к определенному предмету или определенной системе (паре, тройке и т. д.) предметов, но и высказывания, выражающие свойство предметов или отношение между предметами некоторого множества (высказывания о *всеобщности*), и высказывания о существовании предметов из данного множества, обладающих определенным свойством или находящихся в определенном отношении (высказывания о *существовании*). Для построения таких высказываний вводятся операции *связывания кванторами* (или *навешивания кванторов*).

Пусть на множестве A определен некоторый предикат $P(x)$. Возможно, что свойством P обладают все элементы множества A или некоторые из этих элементов (хотя бы один).

(Разумеется, допустим и случай, когда ни один элемент из A не обладает свойством P, но мы не будем здесь рассматривать этот случай.)

В первом случае истинно высказывание: «Для всех x (из A) имеет место (истинно) $P(x)$», во втором — высказывание «Существует x (из A) такое, что $P(x)$ истинно».

Выражение «для всех x» («для всякого x», «для любого x») называется *квантором общности* и обозначается символом $(\forall x)$.

Выражение «существует x такое, что...» называется *квантором существования* и обозначается символом $(\exists x)$.

Приписывание спереди к предикатной формуле квантора общности или существования называется операцией *навешивания квантора* или *связывания квантором*, а переменная, которая «связывается» квантором (которая фигурирует и в предикате, и в кванторе), называется *связанной* переменной.

Например, если $P(x)$ — предикат: «x — простое число», то $(\forall x)\,P(x)$ — ложное высказывание «Всякое число x — простое», а $(\exists x)\,P(x)$ — истинное высказывание «Существует число x такое, что оно — простое».

Квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, а квантор существования — как обобщение дизъюнкции.

Действительно, если область определения A предиката $P(x)$ конечна, например $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то высказывание $(\forall x)\,P(x)$ равносильно конъюнкции $P(a_1) \wedge \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, а высказывание $(\exists x)\,P(x)$ — дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Если же предикат $P(x)$ определен на бесконечном множестве, то кванторы играют роль «бесконечных» конъюнкций и дизъюнкций (чтобы подчеркнуть это, иногда обозначают квантор общности символом $(\wedge x)$, а квантор существования — $(\vee x)$.

Выше приведен пример преобразования одноместного предиката в высказывание с помощью квантора. Чтобы многоместный предикат преобразовать в высказывание, необходимо все предметные переменные связать кванторами.

Пусть, например, x, y — переменные для вещественных чисел (в этом смысле мы обычно говорим «x, y — вещественные числа» и пишем $x, y \in \boldsymbol{D}$), а $<$ — знак бинарного отношения (двуместного предиката) «меньше».

Тогда из предиката $x < y$, связыванием переменных x и y кванторами можно получить восемь высказываний:

$(\forall x)(\forall y)[x < y]$—«для всякого x и всякого y $x < y$»; (1)
$(\forall y)(\forall x)[x < y]$ — «для всякого y и всякого x $x<y$»; (2)
$(\exists x)(\exists y)[x < y]$ — «существует x и существует y такие, что $x < y$; (3)
$(\exists y)(\exists x)[x < y]$ — «существует y и существует x такие, что $x < y$»; (4)
$(\forall x)(\exists y)[x < y]$ — «для всякого x существует y такое, что $x < y$»; (5)
$(\exists y)(\forall x)[x < y]$ — «существует y такое, что для всякого x $x < y$»; (6)
$(\exists x)(\forall y)[x < y]$ — «существует x такое, что для всякого y $x < y$»; (7)
$(\forall y)(\exists x)[x < y]$ — «для всякого y существует x такое, что $x < y$». (8)

Нетрудно заметить, что высказывания (1) и (2) оба ложны и имеют один и тот же смысл; высказывания (3) и (4) оба истинны и имеют один и тот же смысл. Но структуры высказываний (1) и (2), так же как структуры высказываний (3) и (4), отличаются лишь порядком одноименных кванторов. Как видно, изменение порядка одноименных кванторов не влияет на смысл и значение истинности высказывания.

Высказывание (5) истинно, а высказывание (6) ложно. Но структуры этих высказываний отличаются лишь порядком разноименных кванторов. Как видно, изменение порядка разноименных кванторов приводит к изменению смысла и, возможно, значения истинности высказывания. Высказывание (5) утверждает об отсутствии в множестве D наибольшего числа, высказывание же (6) — о наличии такого числа.

Высказывание (7) ложно, а высказывание (8) истинно. Первое утверждает о наличии в D наименьшего числа, второе — об отсутствии такого числа. Структуры этих высказываний, так же как высказываний (5) и (6), отличаются лишь порядком разноименных кванторов.

Если двуместный предикат $P(x, y)$ связывается квантором только по одной переменной, то в результате получается не высказывание, а логическая функция другой, не связанной квантором, или *свободной* переменной, т. е. одноместный предикат.

Рассмотрим, например, формулу $(\exists x)[x < y]$, где $x, y \in A = \{1, 2, 3, 4\}$. Нетрудно заметить, что эта формула определяет логическую функцию одной, свободной, переменной y:

y	$(\exists x)[x < y]$
1	Л
2	И
3	И
4	И

Отметим, что операция подстановки значений применима только к свободным переменным.

Вообще, если в n-местном предикате связать кванторами k переменных ($k \leqslant n$), то получим логическую функцию $n-k$ свободных переменных, т. е. $n-k$-местный предикат. В частности, при $k-n$ получается 0-местный предикат, или высказывание.

§ 17. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

17.1. Определение формулы. Мы пользовались выше термином «формула», хотя для логики предикатов смысл этого термина требует уточнения.

Понятие формулы в логике предикатов может быть определено следующим образом:

1. Всякая высказывательная переменная есть формула.
2. Всякий предикатный символ, все пустые места которого замещены предметными переменными или постоянными, есть формула.
3. Если $\varphi(\ldots, x_i, \ldots)$* — формула, то $(\forall x_i)\varphi(\ldots, x_i, \ldots)$ и $(\exists x_i)\varphi(\ldots, x_i, \ldots)$ тоже формулы. В них переменная x_i связана, а остальные переменные являются такими же, какими они были в формуле $\varphi(\ldots, x_i, \ldots)$.
4. Если φ и ψ — формулы, причем в них нет таких предметных переменных, которые связаны в одной формуле и свободны в другой, то и $\bar{\varphi}$; $(\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi \vee \psi)$; $(\varphi \Longrightarrow \psi)$ тоже формулы. При этом свободные переменные в формулах φ и ψ остаются свободными во всех этих формулах.
5. Других формул в логике предикатов нет.

Формулы, определенные в 1 и 2, называют также *элементарными* формулами.

---

* Многоточие стоит вместо других переменных, которые могут входить в φ.

Из 1 и 4 следует, что все формулы логики высказываний являются также формулами логики предикатов, т. е. множество формул логики предикатов включает (в качестве собственной части) множество формул логики высказываний.

Приведенное определение позволяет установить относительно любой конечной последовательности символов, является ли она формулой логики предикатов.

Принятые нами соглашения об опускании скобок в формулах логики высказываний мы распространим на формулы логики предикатов.

Покажем, например, что последовательность символов

$$(\exists x)(\forall y) P(x, y) \vee (\forall z) S(z) \wedge p$$

есть формула.

1. p — формула (п. 1 определения);
2. $P(x, y)$ — формула (п. 2 определения);
3. $S(z)$ — формула (п. 2 определения);
4. $(\forall z) S(z)$ — формула (из 3 по п. 3 определения);
5. $(\forall z) S(z) \wedge p$ — формула (из 4 и 1 по п. 4 определения);
6. $(\forall y) P(x, y)$ — формула (из 2 по п. 3 определения);
7. $(\exists x)(\forall y) P(x, y)$ — формула (из 6 по п. 3 определения);
8. $(\exists x)(\forall y) P(x, y) \vee (\forall z) S(z) \wedge p$ — формула (из 7 и 5 по п. 4 определения).

Элементарными компонентами этой, как и любой другой, формулы логики предикатов являются элементарные (не расчленяющиеся на другие) предикаты, в том числе нульместные (высказывания). В данной формуле это — двуместный предикат $P(x, y)$, одноместный предикат $S(z)$ и высказывание p.

17.2. Запись математических предложений в виде формул логики предикатов. Приведем несколько примеров выражения математических предложений на языке логики предикатов.

1. Предложение «Всякое натуральное число больше нуля» можно сформулировать в виде импликации с квантором общности:

«Для всякого x, если x — натуральное число, то оно больше 0». В этом высказывании фигурируют два одноместных предиката: «x — натуральное число» — $x \in N$ (для обозначения этого предиката можно, разумеется, использовать и функциональную символику, например, $N(x)$) и $x > 0$ (этот одноместный предикат можно обозначить, например, через $B(x)$).

После выделения этих двух одноместных предикатов высказывание «Всякое натуральное число больше нуля», рассматриваемое в рамках логики высказываний как элементарное, на языке логики предикатов запишется следующим образом:

$$(\forall x)\,[x \in N \Longrightarrow x > 0]$$

или в других обозначениях предикатов

$$(\forall x)\,[N(x) \Longrightarrow B(x)].$$

Можно эту запись несколько упростить (по форме, а не по существу), если вместо квантора общности «для всякого x» применить *ограниченный* квантор общности «для всякого x, принадлежащего N», который мы обозначим символом $(\forall x \in N)$ (встречается и такое обозначение $(\forall x)_{\in N}$).

С ограниченным квантором приведенное выше высказывание запишется так: $(\forall x \in N)\,[x > 0]$.

2. Предложение $\lim a_n = l$ — «предел последовательности $\{a_n\}$ равен числу l» по определению означает: «Для всякого положительного числа ε существует такой номер (натуральное число) n_ε, что для всякого номера n, если $n > n_\varepsilon$, то $|a_n - l| < \varepsilon$».

Словесная формулировка определения составлена так, чтобы можно было без всяких преобразований записать его в символах логики предикатов (с использованием ограниченных кванторов):

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n \in N)\,[n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon].$$

3. Рассмотрим геометрическое предложение, обычно принимаемое в качестве аксиомы: «Для любых двух точек существует прямая, инцидентная им (проходящая через них)».

Введем следующие предикаты:

$T(x)$ — «x — точка»;
$P(x)$ — «x — прямая»;
$I(x, y)$ — «x инцидентна y».

С помощью этих предикатов приведенное предложение запишется так:

$$(\forall x)\,(\forall y)\,[T(x) \wedge T(y) \Longrightarrow (\exists z)\,(P(z) \wedge I(z, x) \wedge I(z, y))].$$

17.3. Предикат равенства. При точном выражении математических предложений часто применяют отношение равенства (совпадения, тождества) предметов. Это отношение не является специфическим для какой-нибудь математической теории, поэтому его относят не к специфическим отношениям, а к общелогическим.

Предикат равенства применяется, например, для точного выражения предложений об единственности, которые встречаются в различных математических теориях, в частности, и геометрического предложения «Для любых двух различных точек не существует более одной прямой, инцидентной им», и арифметического предложения «Для любых двух натуральных чисел не существует более одного натурального числа, равного их сумме».

Предикат равенства, который мы обозначим $x = y$, принимает значение И, если вместо x и y подставляются названия одного и того же предмета, и значение Л, если подставляются названия различных предметов.

Такое понимание равенства (как совпадения) характеризуется следующими условиями:

1. Предмет x совпадает с самим собой (рефлексивность).

2. Если предмет x совпадает с предметом y, то если x обладает некоторым свойством P, то и y обладает этим же свойством, т. е. совпадение предметов означает совпадение всех их свойств.

Эти условия, определяющие предикат равенства, выражаются следующими формулами:

$$(\forall x)\,[x = x]; \tag{1}$$

$$(\forall x)\,(\forall y)\,[x = y \Longrightarrow (P(x) \Longrightarrow P(y))]. \tag{2}$$

Из (1) — (2) выводимы также свойства симметричности

$$(\forall x)\,(\forall y)\,[x = y \Longrightarrow y = x]$$

и транзитивности

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z].$$

Логика предикатов с включенным в нее предикатом равенства (с аксиомами (1) — (2), характеризующими этот предикат) называется также *логикой предикатов с равенством.*

Выразим сейчас на языке логики предикатов с равенством приведенные выше два предложения об единственности.

1. Предложение «Для любых двух различных точек не существует более одной прямой, инцидентной им» означает то же, что предложение: «Для любых двух различных точек и любых двух прямых, если каждая прямая инцидентна этим двум точкам, то эти прямые совпадают».

Для записи этого предложения в виде формулы мы воспользуемся введенными выше (17.2, 3) предикатами $T(x)$, $P(x)$ и $I(x, y)$:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)[T(x) \wedge T(y) \wedge \overline{x = y}^{*} \wedge P(z) \wedge P(t) \wedge \wedge I(z, x) \wedge I(z, y) \wedge I(t, x) \wedge I(t, y) \Longrightarrow z = t].$$

Для упрощения формул условимся о сокращенной записи последовательности одноименных кванторов.

Вместо $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)$ будем писать $(\forall x, y, z, t)$ — — «для всяких x, y, z, t»; вместо $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)$ — $(\exists x, y, z, t)$ — «существуют $x, y; z, t$ такие, что ...» Аналогичные сокращенные записи применим для последовательности одноименных ограниченных кванторов.

С учетом этого соглашения приведенная выше формула запишется так:

$$(\forall x, y, z, t)[T(x) \wedge T(y) \wedge \overline{x = y} \wedge P(z) \wedge P(t) \wedge I(z, x) \wedge I(z, y) \wedge I(t, x) \wedge I(t, y) \Longrightarrow z = t].$$

2. Для записи в виде формулы предложения: «Для любых двух натуральных чисел не существует более одного натурального числа, равного их сумме» введем трехместный предикат $S(x, y, z)$: $x + y = z$.

---

* Различие — отрицание совпадения.

Тогда наше предложение запишется так:

$$(\forall x, y, z, t \in N)[S(x, y, z) \wedge S(x, y, t) \Longrightarrow z = t]$$

или

$$(\forall x, y, z, t \in N)[x + y = z \wedge x + y = t \Longrightarrow z = s]).$$

Упражнения

123. Определить, являются ли нижеследующие последовательности символов формулами логики предикатов:

а) $(\forall x)P(x, y) \Longrightarrow (\forall z)Q(y, z) \wedge R(y,t)$; б) $(\forall x)A(x, y) \wedge (\forall y) B(x, y)$; в) $(\forall x)(\exists y)S(x, y, z) \Longrightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$.

124. Пусть $C(x)$ — предикат «x — составное число»; $R(x, y)$ — предикат «x меньше y»; $S(x, y, z)$ — предикат $x + y = z$; $P(x, y, z)$ — предикат $x \cdot y = z$. Используя введенные обозначения, записать на языке логики предикатов следующие предложения:

а) Для всяких целых чисел x, y существует целое число z такое, что $x + y = z$. б) Для всяких двух целых чисел не существует более одного целого числа, равного их сумме. в) Для всяких целых чисел x, y, z, если $x + y = z$, то $y + x = z$. г) Для всяких целых чисел x, y существует целое число z такое, что $x \cdot y = z$. д) Для любых двух целых чисел не существует более одного целого числа, равного их произведению. е) Для всяких целых чисел x, y, z, если $x \cdot y = z$, то $y \cdot x = z$. ж) Для всяких целых x, z существует целое число y такое, что $x + y = z$. з) Для всяких x, y, x меньше y, если и только если существует натуральное число k такое, что $x + k = y$. и) Для всякого x, x — составное число, если и только если существуют числа y, z, меньшие x и такие, что $y \cdot z = x$. к) Для всяких двух рациональных чисел x, y, если $x < y$, то существует рациональное число z такое, что $x < z$ и $z < y$.

125. Пусть $N(x)$ — предикат «x — натуральное число» ($x \in N$); $C(x)$ — предикат «x — целое число» ($x \in C$); $P(x)$ — предикат «x — простое число»; $B(x)$ — предикат «x — положительное число»; $T(x)$ — предикат «x — четное число»; $D(x, y)$ — предикат «x делит y». Сформулировать словесно записанные ниже на языке логики предикатов высказывания и указать, какие из них истинны, какие ложны:

а) $(\forall x)[N(x) \Longrightarrow C(x)]$; б) $(\exists x)[N(x) \wedge C(x)]$; в) $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow N(x)]$; г) $(\forall x)[C(x) \wedge B(x) \Longleftrightarrow N(x)]$; д) $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow \overline{T}(x) \vee \overline{T}(x)]$; е) $(\forall x)(\exists y)[C(x) \wedge C(y) \Longrightarrow D(x, y)]$; ж) $(\exists y)(\forall x)[C(x) \wedge C(y) \Longrightarrow$

$\Rightarrow D(x, y)]$; з) $(\exists x)(\forall y)[C(x) \wedge C(y) \Rightarrow D(x, y)]$; и) $(\forall x, y)[T(x) \wedge \wedge \overline{T}(y) \Rightarrow \overline{D}(x, y)]$; к) $(\exists x)[P(x) \wedge T(x)]$; л) $(\forall x)[P(x) \Rightarrow \overline{T}(x)]$.

126. Выразить на языке логики предикатов следующие высказывания:

а) Существует **по крайней мере один** предмет, обладающий свойством P (выражение «существует по крайней мере один предмет» понимается в том же смысле, что «существует предмет»). б) **Не существует** предмета, обладающего свойством P (или «неверно, что существует предмет, обладающий свойством P»).* в) **Не существует более одного** предмета, обладающего свойством P (или «существует не более одного предмета, обладающего свойством P»). г) **Существует точно один** предмет, обладающий свойством P («существует предмет, обладающий свойством P и не существует более одного предмета, обладающего этим свойством»). д) **Существует по крайней мере** два предмета, обладающих свойством P (или «существуют два различных предмета, каждый из которых обладает свойством P»). е) **Существует не более двух предметов**, обладающих свойством P (или «для всяких трех предметов x, y, z, если каждый из них обладает свойством P, то $x = z$ или $y = z$»). ж) **Существует точно два предмета**, обладающих свойством P (или «существует по крайней мере два предмета, обладающих свойством P, и не существует более двух предметов, обладающих этим свойством»).

127. Пусть A, B, C — переменные для точек; a, $в$, c, — переменные для прямых; $\ast$ — знак отношения (двуместного предиката) «инцидентно» («лежит на», «проходит через»), применимого к точке и прямой ($A \ast a$). Используя эти обозначения, записать в виде формул логики предикатов следующие геометрические предложения (аксиомы, характеризующие предикат «инцидентно» на плоскости):

а) Для любых двух точек существует прямая, инцидентная им. б) Для любых двух различных точек не существует более одной прямой, инцидентной им. в) Для любой прямой существуют по крайней мере две точки, инцидентные ей. г) Существуют три точки, неинцидентные одной прямой (т. е. такие, что не существует прямой, инцидентной каждой из этих точек).

128. Используя введенные выше (упр. 127) обозначения, записать в виде формулы логики предикатов предложение: «Для любых двух различных прямых не существует более одной точки, инцидентной каждой из этих прямых».

---

* Знак отрицания над высказыванием, начинающимся с квантора, ставится только над символом квантора.

18.1. Определение равносильности формул. Всякая формула логики предикатов выражает некоторую логическую функцию от содержащихся в ней высказывательных, предикатных и свободных предметных переменных.

Например, формула $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee S(z) \wedge p$ выражает логическую функцию предикатных переменных P, S, p (последняя — переменная для 0-местных предикатов, т. е. высказывательная переменная) и свободной предметной переменной z. Значениями предикатных переменных являются конкретные (индивидуальные) предикаты, определенные на некотором множестве, значениями свободных предметных переменных — элементы этого множества.

Если две формулы φ_1 и φ_2 выражают одну и ту же логическую функцию от содержащихся в них предикатных и свободных предметных переменных, т. е. если они принимают обе значение И или обе значение Л при любых одинаковых наборах значений этих переменных, они называются *равносильными*.

Это обстоятельство выражают, так же как в логике высказываний, в виде записи $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Данное определение равносильности формул логики предикатов является обобщением определения равносильности формул логики высказываний. Если φ_1 и φ_2 не содержат предметных переменных, а содержат только переменные для 0-местных предикатов, т.е. высказывательные переменные, то φ_1 и φ_2 — равносильные формулы логики высказываний.

Таким образом, равносильные формулы логики высказываний являются также равносильными формулами логики предикатов.

18.2. Некоторые равносильности формул с кванторами. Рассмотрим некоторые находящие широкое применение равносильности формул логики предикатов, содержащих кванторы.

1. Если область определения предиката $P(x)$ — конечное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то из самого смысла кванторов общности и существования следует, что

$$(\forall x)P(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i);$$

$$(\exists x)P(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} P(a_i);$$

поэтому имеем также:

$$\overline{(\forall x)}P(x)^* \equiv \overline{\bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i)};$$

$$\overline{(\exists x)}P(x) \equiv \overline{\bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)}.$$

Используя законы де Моргана, обобщенные на случай n высказываний (упр. 95):

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i)} \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \overline{P}(a_i);$$

$$\overline{\bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{P}(a_i),$$

и транзитивность отношения равносильности, получаем:

$$\overline{(\forall x)}P(x) \equiv (\exists x)\overline{P}(x); \qquad (1)$$

---

* $\overline{(\forall x)}P(x)$ пишется вместо $\overline{(\forall x)P(x)}$ и $\overline{(\exists x)}P(x)$ — вместо $\overline{(\exists x)P(x)}$.

$$\overline{(\exists x)}P(x) \equiv (\forall x)\overline{P}(x). \qquad (2)$$

Равносильности (1) и (2) сохраняются и для случая, когда область определения $P(x)$ — бесконечное множество, как обобщение законов де Моргана на случай «бесконечных» конъюнкций и дизъюнкций.

Эти равносильности соответствуют обычному смыслу кванторов. Высказывание «Неверно, что всякий x (из данного множества) обладает свойством P» понимается обычно в том же смысле, что и высказывание «Существует x (из данного множества), не обладающий свойством P (или обладающий свойством $\overline{P}$)».

Это и зафиксировано в равносильности (1).

Высказывание «Неверно, что существует x (из данного множества), обладающий свойством P» понимается в том же смысле, что и высказывание «Ни один x (из данного множества) не обладает свойством P» (или «Все x обладают свойством $\overline{P}$»).

Это и зафиксировано в равносильности (2).

На основе равносильностей (1) и (2) мы получаем следующее правило построения отрицания высказывания с квантором: квантор общности меняется на квантор существования и обратно, а знак отрицания переносится на выражение, стоящее за этим квантором.

Это же правило применимо и к формулам, содержащим несколько кванторов. Например,

$$\overline{(\forall x)}(\exists y)P(x, y) \equiv (\exists x)\overline{(\exists y)}P(x, y);$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)\overline{P}(x, y).$$

В качестве примера применим правило построения отрицания для перевода на язык логики предикатов предложения «Число l не является пределом последовательности $\{a_n\}$». Это предложение является отрицанием предложения «Число l — предел последовательности $\{a_n\}$», т. е. определения предела последовательности (17.2, 2)

$$\overline{(\forall\varepsilon>0)(\exists n_\varepsilon\in N)(\forall n\in N)[n>n_\varepsilon\Rightarrow|a_n-l|<\varepsilon]}.$$

На основании равносильностей (1) и (2) по сформулированному выше правилу получаем

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall n_\varepsilon\in N)(\exists n\in N)\overline{[n>n_\varepsilon\Rightarrow|a_n-l|<\varepsilon]}.$$

Это высказывание, с учетом равносильности $\overline{\varphi\Rightarrow\psi}\equiv\equiv\varphi\wedge\overline{\psi}$, приводится к виду

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall n_\varepsilon\in N)(\exists n\in N)[n>n_\varepsilon\wedge|a_n-l|\geqslant\varepsilon].$$

Таким образом, высказывание «Число l не является пределом последовательности $\{a_n\}$» означает то же, что и высказывание «Существует положительное ε такое, что для всякого номера n_ε существует номер n такой, что $n>n_\varepsilon$ и $|a_n-l|\geqslant\varepsilon$». Последнее и применяется, когда нужно доказать, что число l не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

2. Имеет место равносильность

$$(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\equiv(\forall x)[P(x)\wedge Q(x)], \qquad (3)$$

представляющая собой обобщение свойств коммутативности и ассоциативности конъюнкции на случай «бесконечной» конъюнкции.

Формулы $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$ и $(\forall x)[P(x)\vee Q(x)]$ не являются равносильными. Например, если $P(x)$ — предикат «x — простое число», а $Q(x)$ — предикат «x — составное число», определенные на множестве $N\setminus\{1\}$, то первая из этих формул выражает ложное высказывание, вторая же — истинное высказывание.

Таким образом, операция навешивания квантора общности дистрибутивна относительно конъюнкции (равносильность (3)), но недистрибутивна относительно дизъюнкции.

3. Имеет место равносильность

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)[P(x) \vee Q(x)], \qquad (4)$$

являющаяся обобщением свойств коммутативности и ассоциативности для «бесконечной дизъюнкции».

Формулы $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ и $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$ не являются равносильными. Например, при тех же значениях предикатных переменных P и Q, что и в предыдущем примере 2, первая из этих формул выражает истинное высказывание, вторая же — ложное.

Таким образом, операция навешивания квантора существования дистрибутивна относительно дизъюнкции (равносильность (4)), но недистрибутивна относительно конъюнкции.

Упражнения

129. Построить отрицания следующих высказываний и прочитать их словами (x, y, z, t — переменные для вещественных чисел):

а) $(\forall x, y)[x > y \vee \overline{x < y \vee x = y}]$; б) $(\exists x)(\forall y)\overline{[y = 0} \Rightarrow x + y = x]$; в) $(\exists x, y)\overline{(\forall z)[x + y = z} \vee (\exists t)(x + y = t \wedge \overline{z = t})]$.

130. Построить высказывания, опровергающие следующие высказывания (т. е. истинные высказывания, являющиеся отрицаниями данных высказываний):

а) $(\forall x, y)[x^2 + y^2 > 0]$; б) $(\forall x, y)[\sqrt{x^2 + y^2} = x + y]$: ($x$, y — переменные для вещественных чисел).

131. Пусть $D(x, y)$ — предикат «x делит y», а x, y — переменные для целых чисел. Сформулировать словами предложение, выраженное формулой

$$(\forall x, y)[\overline{D}(3, x) \wedge (\overline{D}(3, y) \Rightarrow \overline{D}(3, x + y)].$$

Построить отрицание этого предложения и прочитать его словами.

132. Записать в виде формулы аксиому параллельности евклидовой планиметрии в следующей словесной формулировке: «Не существует более одной прямой, параллельной данной и проходящей через точку вне ее». Отрицание этой аксиомы есть аксиома параллельности планиметрии Лобачевского. Записать в виде формулы и прочитать словами аксиому параллельности Лобачевского.

133. Прочитать словами следующую символическую запись:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \underset{Df}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0)[\,|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Построить отрицание определения предела функции в точке и сформулировать словами, что означает $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l$.

134. Какая из нижеследующих формул выражает определение периодической функции:

а) $(\forall x)(\exists l)[f(x+l) = f(x)]$; б) $(\exists l)(\forall x)[f(x+l) = f(x)]$?

Построить отрицание этого определения и сформулировать его словами.

135. Какое свойство функции f выражается с помощью формулы

$$(\forall x_1, x_2)[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]?$$

Построить отрицание этой формулы и прочитать его словами.

136. Записать в виде формулы высказывание «Функция f — монотонно убывающая». Построить отрицание этой формулы и прочитать его словами.

137. Записать в виде формулы высказывание «$f(x_0)$ — наибольшее значение функции f». Построить отрицание этой формулы и прочитать его словами.

§ 19. ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

19.1. Определение общезначимой формулы. Формула логики предикатов, принимающая значение И при любых значениях содержащихся в ней предикатных переменных, в любой области определения этих предикатов и при любых значениях свободных предметных переменных из этой области, называется *общезначимой* формулой.

Высказывание «φ — общезначимая формула» обозначим символом $\vdash \varphi$.

Понятие общезначимой формулы логики предикатов, как явствует из данного определения, является обобщением понятия тождественно-истинной формулы логики высказываний. Исходя из этого определения, все тождественно-истинные формулы логики высказываний являются общезначимыми формулами логики предикатов (поэтому мы приняли для обозначения общезначимости формулы логики предикатов тот же знак, что и для обозначения тождественной истинности формулы логики высказываний). Более того, тождественно-истинные формулы логики высказываний служат источником новых общезначимых формул, которые можно получить подстановкой в них вместо букв (высказывательных переменных) формул логики предикатов.

Например, подставляя в $p \vee \overline{p}$ (тождественно-истинную формулу, выражающую закон исключенного третьего) $P(x_1, \ldots, x_n)$ вместо p, получаем общезначимую формулу

$$P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, пусть P^0 — произвольный n-местный предикат, определенный на некотором множестве A, а $(a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор значений предметных переменных из A. Подставляя вместо переменных эти значения, получаем высказывание

$$P^0(a_1, \ldots, a_n) \vee \overline{P^0}(a_1, \ldots, a_n),$$

которое по закону исключенного третьего (для логики высказываний) имеет значение И.

Так как P^0 — произвольное значение предикатной переменной $\bar{P}$, а $(a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор значений предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$ из области определения P^0, то

$$\vdash P(x_1, \ldots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

Разумеется, не все общезначимые формулы логики предикатов можно получить таким путем из тождественно-истинных формул логики высказываний.

Общезначимые формулы выражают законы логики на языке логики предикатов. Множество тождественно-истинных формул логики высказываний представляет собой лишь собственную часть множества общезначимых формул логики предикатов. Таким образом, язык логики предикатов более «выразителен»; он позволяет выразить более широкий круг законов логики, а следовательно, и анализировать более широкий круг рассуждений.

19.2. Некоторые общезначимые формулы с кванторами. Ниже приводятся некоторые находящие широкое применение общезначимые формулы, содержащие кванторы:

$$\overline{(\forall x)} P(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\ \bar{P}(x); \tag{1}$$

$$\overline{(\exists x)} P(x) \Longleftrightarrow (\forall x)\ \bar{P}(x); \tag{2}$$

$$(\forall x) P(x) \Longleftrightarrow \overline{(\exists x)}\ \bar{P}(x); \tag{3}$$

$$(\exists x) P(x) \Longleftrightarrow \overline{(\forall x)} P(x); \tag{4}$$

$$(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \Longleftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]; \tag{5}$$

$$(\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x) \Longleftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]; \tag{6}$$

$$(\forall x)(\forall y) P(x, y) \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x) P(x, y); \tag{7}$$

$$(\exists x)(\exists y) P(x, y) \Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ P(x, y); \tag{8}$$

$$(\exists x)(\forall y) P(x, y) \Longrightarrow (\forall y)(\exists x) P(x, y); \tag{9}$$

$$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Longrightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]; \tag{10}$$

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Longrightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x); \tag{11}$$

$$(\forall x)[P(x) \Longrightarrow Q(x)] \Longrightarrow [(\forall x) P(x) \Longrightarrow (\forall x) Q(x)]; \tag{12}$$

$$(\forall x) P(x) \Longrightarrow P(y); \tag{13}$$

$$P(y) \Longrightarrow (\exists x) P(x). \tag{14}$$

Заметим, что формулы (1) — (12) не содержат свободных предметных переменных, т. е. выражают логические функции предикатных переменных, причем, так как они общезначимы, то при любых значениях этих переменных принимают только значение И (установление общезначимости этих формул составляет содержание нижеследующих упражнений).

Формулы (13) и (14) выражают логические функции предикатной переменной P и свободной предметной переменной y.

Покажем, что (13) и (14) общезначимы.

Пусть $P(x)$ — произвольный предикат, определенный на некотором множестве A. Если $\underset{x}{M}[P(x)] \subset A$, то $(\forall x) P(x)$ имеет значение Л и поэтому вся формула (13) принимает значение И. Если же $\underset{x}{M}[P(x)] = A$, то $P(y)$ принимает значение И при любом значении y из A и, следовательно, снова (13) принимает значение И.

Так как $P(x)$ — произвольный предикат и всегда $\underset{x}{M}[P(x)] \subseteq A$, то общезначимость (13) доказана.

Для установления общезначимости (14) рассмотрим два случая:

1) если $\underset{x}{M}[P(x)] = \varnothing$, то $P(y)$ принимает значение Л при любом значении y из A и, следовательно, (14) принимает значение И;

2) если $\underset{x}{M}[P(x)] \neq \varnothing$, то $(\exists x) P(x)$ принимает значение И и снова (14) принимает значение И.

Так как всегда имеет место один из случаев 1) — 2), то общезначимость формулы (14) доказана.

Упражнения

138. Доказать, что если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, то $\vdash \varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_2$, и обратно.

139. Доказать общезначимость приведенных выше (19.2) формул (1) — (8).

140. Доказать общезначимость импликаций (9) — (12) (19.2) (установить, что в каждой из этих импликаций область истинности основания включается в область истинности следствия, поэтому нельзя найти таких значений предикатных переменных, при которых основание было бы истинным, а следствие — ложным).

141. Доказать, что если формула логики предикатов $\varphi(x)$, содержащая в качестве свободной только переменную x, является общезначимой, то и формула $(\forall x)\, \varphi(x)$ также является общезначимой, и обратно.

142. Если формула логики предикатов $\varphi(x)$, содержащая в качестве свободной только предметную переменную x, является общезначимой, то и формула $(\exists x)\, \varphi(x)$ также является общезначимой. Верно ли обратное?

143. Доказать, что:

а) если формула логики предикатов $\varphi \Longrightarrow \psi$ общезначима, то $\vdash (\forall x)\, \varphi \Longrightarrow (\forall x)\, \psi$ и $\vdash (\exists x)\, \varphi \Longrightarrow (\exists x)\, \psi$; б) если $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \psi$, то $\vdash (\forall x)\, \varphi \Longleftrightarrow (\forall x)\, \psi$ и $\vdash (\exists x)\, \varphi \Longleftrightarrow (\exists x)\, \psi$.

144. Доказать, что нижеследующие импликации не являются общезначимыми (подобрать такие значения предикатных переменных, при которых основание импликации истинно, а следствие ложно):

а) $(\forall y)(\exists x)\, P(x, y) \Longrightarrow (\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$; б) $(\forall x)\, [P(x) \vee Q(x)] \Longrightarrow (\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x)$; в) $(\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x) \Longrightarrow (\exists x)\, [P(x) \wedge Q(x)]$; г) $[(\forall x)\, P(x) \Longrightarrow (\forall x)\, Q(x)] \Longrightarrow (\forall x)\, [P(x) \Longrightarrow Q(x)]$; д) $(\exists x)\, P(x) \Longrightarrow (\forall x)\, P(x)$.

145. Доказать, что если $\vdash \varphi \Longrightarrow \psi$ и $\vdash \varphi$, то $\vdash \psi$.

§ 20. АНАЛИЗ РАССУЖДЕНИЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА

20.1. Пример. На языке логики предикатов мы уже можем провести анализ рассуждений типа (а) — (б), приведенных в начале этой главы (14.1) в качестве иллюстрации недостаточности логики высказываний для такого анализа.

Рассмотрим рассуждение (а): «Всякое целое число — рациональное число; 1 — целое число; следовательно, 1 — рациональное число».

Введем два одноместных предиката, определенных, например, на множестве D вещественных чисел: $C(x)$ — «x есть целое число» и $R(x)$ — «x есть рациональное число».

Используя эти предикаты и квантор общности, первую посылку можно сформулировать так: «Для всякого x, если x — целое число, то x — рациональное число» и, следовательно, записать в принятых обозначениях следующим образом:

$$(\forall x)\,[C(x) \Longrightarrow R(x)].$$

В этих же обозначениях вторая посылка запишется — $C(1)$, а заключение — $R(1)$.

Установим теперь правильность рассуждения (а), т. е. убедимся, что при истинности посылок его заключение не может быть ложным.

Так как $(\forall x)\,[C(x) \Longrightarrow R(x)]$ — истинное высказывание, то предикат $C(x) \Longrightarrow R(x)$ при подстановке вместо переменной x любого ее значения обращается в истинное высказывание:

x	$C(x)$	$R(x)$	$C(x) \Longrightarrow R(x)$
$\sqrt{2}$	Л	Л	И
0,5	Л	И	И
-3	И	И	И
. . .	. . .	. . .	. . . и т. д.

Подставим вместо x значение 1. Получим истинное высказывание

$$C(1) \Longrightarrow R(1).$$

Теперь $C(1) \Longrightarrow R(1)$, $C(1) \vdash R(1)$ по ПЗ.

Если под C и R понимать предикатные переменные, а под 1 — название какого-нибудь элемента из области определения предикатов $C(x)$ и $R(x)$ (можно вместо 1 писать a), то мы установили правильность не только одного рассуждения (а), но и любого рассуждения такой же структуры, построенного по правилу вывода

$$\frac{(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)],\ C(a)}{R(a)},$$

представляющего собой одно из возможных обобщений ПЗ в логике предикатов.

Мы установили, в частности, и правильность рассуждения (б): «Всякий ромб — параллелограмм; $ABCD$ — ромб; следовательно, $ABCD$ — параллелограмм».

В этом случае $C(x)$ обозначает предикат «x — ромб»; $R(x)$ — предикат «x — параллелограмм», определенные, например, на множестве четырехугольников, а элемент a этого множества — четырехугольник $ABCD$.

20.2. Простейшие правила вывода. Попытаемся сейчас построить *вывод* заключения $R(a)$ из посылок $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$ и $C(a)$.

Прежде всего распространим понятие вывода, введенное в гл. 2, на логику предикатов следующим образом: под выводом заключения из посылок будем понимать конечную последовательность формул логики предикатов, удовлетворяющую условиям: во-первых, каждая формула последовательности или посылка, или получается из предшествующих формул по какому-нибудь правилу вывода логики предикатов (включая правила вывода логики высказываний) и, во-вторых, последняя формула — заключение.

При рассмотрении приведенных ниже примеров мы по существу обнаружим некоторые правила вывода, которые широко применяются в математических доказательствах. До введения правила, необходимого для определенного шага вывода, будем ставить в соответствующей строке знак вопроса.

1) В качестве первого примера построим вывод

$$(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)],\ C(a) \vdash R(a).$$

1. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$;	1. п;
2. $C(a) \Longrightarrow R(a)$;	2. ? (1);
3. $C(a)$;	3. п;
4. $R(a)$;	4. ПЗ (2, 3).

Как видно, чтобы последовательность формул 1 — 4 была требуемым выводом, необходимо ввести правило вывода, позволяющее получить из формулы 1 формулу 2, т. е. $\frac{(\forall x)P(x)}{P(a)}$, где a — предметная постоянная, название элемента — из области определения предиката $P(x)$ (в нашем примере роль предиката $P(x)$ играет $C(x) \Longrightarrow R(x)$).

Это правило вывода обосновывается тем, что

$$\vdash (\forall x)P(x) \Longrightarrow P(a). \qquad (1)$$

Действительно, если $P(a)$ истинно, то и импликация (1) истинна. Если же $P(a)$ ложно, то ложно и высказывание $(\forall x)P(x)$, а следовательно, (1) снова истинно.

Это правило, позволяющее вывести единичное высказывание (касающееся одного предмета a) из общего, назовем правилом *вывода единичного* и обозначим BE.

Теперь вывод заключения $R(a)$ из посылок $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$ и $C(a)$ запишется следующим образом:

1. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$;	1. п;
2. $C(a) \Longrightarrow R(a)$;	2. ВЕ (1);
3. $C(a)$;	3. п;
4. $R(a)$;	4. ПЗ (2, 3).

2) Несколько изменим теперь приведенное выше (20.1) рассуждение (1), заменив в нем 1 переменной y для элементов из области определения D предикатов $C(x)$ и $R(x)$: «Все целые числа — рациональные; y — целое число; следовательно, y — рациональное число».

В принятых обозначениях это рассуждение запишется так:

$$(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)],\ C(y) \vdash R(y).$$

Построим конечную последовательность формул, которая могла бы послужить выводом заключения из посылок.

1. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$;	1. п;
2. $C(y) \Longrightarrow R(y)$;	2. ? (1);
3. $C(y)$;	3. п;
4. $R(y)$;	4. ? (2, 3).

Для получения формулы 2 из 1 необходимо правило вывода

$$\frac{(\forall x)\,P(x)}{P(y)},$$

позволяющее вывести логическую функцию из общего высказывания.

Это правило обосновывается общезначимостью формулы

$$(\forall x)\,P(x) \Longrightarrow P(y),$$

содержащейся в приведенном выше (20.2) перечне общезначимых формул под номером (13). Общезначимость этой формулы там же доказана.

Правило вывода $\frac{(\forall x) P(x)}{P(y)}$ назовем правилом *вывода логической функции* и обозначим ВЛ.

Для получения формулы 4 из формул 2 и 3, очевидно, нужно расширить ПЗ на логические функции

$$\frac{P(x) \Longrightarrow Q(x),\ P(x)}{Q(x)}.$$

Это правило обосновывается общезначимостью формулы

$$[P(x) \Longrightarrow Q(x)]\, P(x) \Longrightarrow Q(x),$$

получаемой из тождественно-истинной формулы логики высказываний

$$(p \Longrightarrow q)\, p \Longrightarrow q,$$

заменой p на $P(x)$ и q на $Q(x)$.

Можно также обосновать ПЗ для логических функций способом от противного (допущение о существовании значения x из области определения $P(x)$ и $Q(x)$, при котором посылки истинны, а заключение ложно, приводит к противоречию).

Впредь ПЗ будет обозначать правило заключения применительно к высказываниям или логическим функциям (высказывательным формам).

Аналогично расширяются на логические функции и другие правила вывода логики высказываний.

Теперь можно записать вывод заключения $R(y)$ из посылок $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$ и $C(y)$ следующим образом:

1. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$;	1. п;
2. $C(y) \Longrightarrow R(y)$;	2. ВЛ (1);
3. $C(y)$;	3. п;
4. $R(y)$;	4. ПЗ (2, 3).

3) Геометрическую теорему «Если треугольник — равнобедренный, то углы, лежащие против равных сторон, равны» надо понимать как общее высказывание «Для всякого треугольника, если он равнобедренный, углы, лежащие против равных сторон, равны».

Однако в ходе доказательства квантор общности опускается.

Мы исходим из рассмотрения произвольного треугольника ABC, в котором $AB = BC$, и доказываем, что $\angle A = \angle C$. Наше обычное, «неформальное», доказательство (понятие обычного, неформального, доказательства рассматривается дальше, гл. 4) свидетельствует о существовании вывода заключения $\angle A = \angle C$ из геометрических аксиом и ранее уже доказанных теорем, совокупность которых обозначим через Г, и посылок: «ABC — треугольник», которую мы обозначим через Т (ABC) (т. е. вводим одноместный предикат Т (x) — «x — треугольник»), и $AB = BC$.

Таким образом имеем:

$$\Gamma,\ \mathrm{T}\,(ABC),\ AB = BC \vdash \angle A = \angle C. \qquad (1)$$

Если применить ТД к (1), получим

$$\Gamma,\ \mathrm{T}\,(ABC) \vdash AB = BC \Longrightarrow \angle A = \angle C. \qquad (2)$$

Применяя ТД к (2), получаем

$$\Gamma \vdash \mathrm{T}\,(ABC) \Longrightarrow (AB = BC \Longrightarrow \angle A = \angle C) \qquad (3)$$

и, учитывая равносильность $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \equiv pq \Longrightarrow r$,

$$\Gamma \vdash \mathrm{T}\,(ABC) \wedge AB = BC \Longrightarrow \angle A = \angle C. \qquad (4)$$

В завершение доказательства мы утверждаем, что

$$\Gamma \vdash (\forall\, ABC)\,[\mathrm{T}\,(ABC) \wedge AB = BC \Longrightarrow \angle A = \angle C]. \qquad (5)$$

Для того чтобы узаконить переход от (4) к (5), примем Принцип обобщения, или правило введения квантора общности (ВКО), которое в общем виде формулируется следующим образом.

Для логической функции $P(x)$, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash P(x)$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash (\forall x) P(x)$ при условии, что каждая посылка φ_i — высказывание или логическая функция, не содержащая x в качестве свободной переменной.

При указанном ограничении, если допустить, что $(\forall x) P(x)$ не следует из посылок $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то получится, что существует значение x (хотя бы одно), при котором $P(x)$ ложно при истинности посылок, следовательно и $P(x)$ не следует из этих посылок, что противоречит условию.

(Это рассуждение, разумеется, не претендует на строгое доказательство ВКО, которое возможно лишь при строгом, аксиоматическом построении логики предикатов.)

Использование ВКО без учета ограничения, касающегося x, может привести к ложным заключениям.

Приведем пример некорректного применения ВКО.

Рассмотрим теорему: «Все прямые, проходящие через точку A параллельно плоскости α, лежат в плоскости β, параллельной α и проходящей через точку A».

Обозначим для краткости высказывание $\beta \parallel \alpha \wedge \beta \divideontimes A$ через p и введем два предиката $C(x)$: «x — прямая» и $K(x)$: $x \divideontimes A \wedge x \parallel \alpha$, определенные на множестве геометрических элементов (прямых и плоскостей). Тогда теорема может быть записана так:

$$\Gamma,\ p,\ C(x),\ K(x) \vdash x \divideontimes \beta. \tag{1}$$

Если применить к (1) ВКО, получим ложное заключение

$$\Gamma,\ p,\ C(x),\ K(x) \not\vdash (\forall x)[x \divideontimes \beta].$$

Это объясняется тем, что некоторые из посылок ($C(x)$, $K(x)$) содержат x в качестве свободной переменной.

Для получения правильного вывода нужно предварительно применить к (1) ТД (которая, так же как правила вывода логики высказываний, расширяется на логику предикатов).

В результате двукратного применения ТД получаем:

$$\Gamma,\ p \vdash C(x) \Rightarrow (K(x) \Rightarrow x \ast \beta)$$

или

$$\Gamma,\ p \vdash C(x) \wedge K(x) \Rightarrow x \ast \beta,$$

после чего, применяя ВКО, приходим к общему заключению

$$\Gamma,\ p \vdash (\forall x)\,[C(x) \wedge K(x) \Rightarrow x \ast \beta].$$

Имеющиеся у нас правила вывода могут быть использованы для установления правильности *силлогизмов*, к рассмотрению которых мы переходим.

20.3. Категорические высказывания. Основное содержание традиционной формальной логики по существу составляет разработанная еще Аристотелем теория так называемого *категорического силлогизма*.

Под категорическим силлогизмом в традиционной логике понимают рассуждение, в котором из двух посылок выводится заключение, причем посылки и заключение представляют собой *категорические высказывания* какого-нибудь из следующих четырех типов:

Все A суть B (общеутвердительное высказывание); (a).

Ни одно A не есть B (общеотрицательное высказывание); (e)

Некоторые A суть B (частноутвердительное высказывание); (i)

Некоторые A не суть B (частноотрицательное высказывание) (o)

A и B называют *терминами* высказывания.

Названия четырех типов категорических высказываний (a, e, i, o) взяты из латинских слов: *affirmo* — утверждаю и *nego* — отрицаю по следующему правилу: общие высказывания обозначаются первыми, частные — вторыми гласными; утвердительные высказывания — гласными слова *affirmo*, отрицательные — гласными слова *nego*.

Термины высказываний можно рассматривать как множества или как свойства (одноместные предикаты). Так, высказывание «Все A суть B» можно понимать в смысле «Все предметы, принадлежащие A, принадлежат и множеству B» (множество A включается в B), или же в смысле: «Все предметы, обладающие свойством A, обладают и свойством B». Разумеется, каждый из этих смыслов сводим к другому, если принадлежность к множеству A называть свойством A, т. е. $A(x)$ обозначает предикат: $x \in A$, или множество $A = \underset{x}{M}[A(x)]$.

Используя такие обозначения, мы запишем четыре типа категорических высказываний на языке множеств (логики классов) и свойств (логики одноместных предикатов) следующим образом:

Название типа	Словесное выражение	Выражение на языке множеств	Выражение на языке одноместных предикатов
a	Все A суть B	$A \subseteq B$ (или $A \cap B = A$)	$(\forall x)[A(x) \Rightarrow B(x)]$
e	Ни одно A не есть B	$A \cap B = \varnothing$	$(\forall x)[A(x) \Rightarrow \overline{B}(x)]$
i	Некоторые A суть B	$A \cap B \neq \varnothing$	$(\exists x)[A(x) \wedge B(x)]$
o	Некоторые A не суть B	$A \cap \overline{B} \neq \varnothing$	$(\exists x)[A(x) \wedge \overline{B}(x)]$

Выясним логическую связь (связь между значениями истинности) высказываний четырех типов с одним и тем же содержанием.

Возьмем отрицание высказывания типа a:

$$\overline{a} \equiv \overline{(\forall x)}[A(x) \Rightarrow B(x)] \equiv (\exists x)\,\overline{[A(x) \Rightarrow B(x)]};$$
$$\equiv (\exists x)[A(x) \wedge \overline{B}(x)];$$
$$\equiv o.$$

Таким образом, общеутвердительное высказывание есть отрицание частноотрицательного, а следовательно, частноотрицательное — отрицание общеутвердительного ($o \equiv \overline{a}$).

Аналогично получаем, что $e \equiv \bar{i}$ и $i \equiv \bar{e}$.

В предположении, что $A \neq \varnothing$, т. е. что $(\exists x) A(x)$ — истинное высказывание, легко установить, что из общеутвердительного высказывания следует частноутвердительное ($a \vdash i$) и из общеотрицательного — частноотрицательное ($e \vdash o$). Интуитивно это совершенно ясно: если истинно, что «все A суть B», причем A — непустое множество, то истинно, что «некоторые A суть B», в смысле «Существует элемент A, принадлежащий B».

Докажем, что

$$(\exists x) A(x),\ (\forall x)[A(x) \Rightarrow B(x)] \vdash (\exists x)[A(x) \wedge B(x)].$$

Используя ТД, достаточно доказать, что

$$\vdash (\exists x) A(x) \Rightarrow ((\forall x)[A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow (\exists x)[A(x) \wedge B(x)]).$$

Действительно, преобразуя эту формулу, получаем

$$(\exists x) A(x) \Rightarrow ((\forall x)[A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow (\exists x)[A(x) \wedge B(x)]) \equiv$$
$$\equiv \overline{(\exists x)} A(x) \vee \overline{(\forall x)}[A(x) \Rightarrow B(x)] \vee (\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \equiv \overline{(\exists x)} A(x) \vee$$
$$\vee (\exists x)[A(x) \wedge \bar{B}(x)] \vee (\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \equiv \overline{(\exists x)} A(x) \vee (\exists x) A(x) \equiv \text{И}.$$

Таким образом, мы доказали, что $a \vdash i$ при указанном выше условии. Заменяя всюду $B(x)$ на $\bar{B}(x)$, получаем

$$(\exists x) A(x),\ (\forall x)[A(x) \Rightarrow \bar{B}(x)] \vdash (\exists x)[A(x) \wedge \bar{B}(x)],$$

т. е. $e \vdash o$ при том же условии.

Высказывания a и e (противоположные) не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. Высказывания i и o не могут быть одновременно ложными, но могут быть одновременно истинными.

В традиционной логике связь между высказываниями a, e, i, o изображается в виде квадрата (*логический квадрат*), вершины которого изображают высказывания, а стороны и диагонали — отношения между высказываниями (рис. 28).

20.4. Категорический силлогизм. Посылками категорического силлогизма (дальше будем говорить «силлогизм» вместо «категорический силлогизм») могут быть два высказывания (категорических), имеющих один общий термин, например, «Все A суть B» и «Ни одно B не есть C». Задача состоит в нахождении заключения в виде высказывания одного из четырех типов с терминами A и C. Из данных посылок следует заключение «Ни одно A не есть C» (или «Ни одно C не есть A», что наглядно иллюстрируется диаграммой (рис. 29).

Если же взять посылки «Все A суть B» и «Некоторые B не суть C» ($A \cap B = A$ и $B \cap \overline{C} \neq \varnothing$), то из них не следует никакое заключение с терминами A и C, так как данные посылки не определяют однозначно отношение между множествами A и C. На рис. 30 приведены 4 диаграммы (*а*, *б*, *в*, *г*), в каждой из которых обе посылки истинны.

Предположим, что из данных посылок следует заключение «Некоторые A не суть C» ($A \cap \overline{C} \neq \varnothing$). Однако на диаграмме (рис. 30, *в*) изображен случай, когда обе посылки истинны, а это

Рис. 28

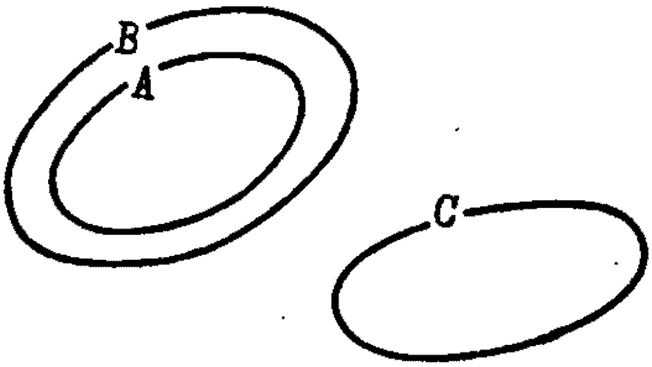


Рис. 29

высказывание ложно. Следовательно, оно не является заключением из данных посылок.

Аналогично опровергается (с помощью диаграммы) и предположение, что из данных посылок следует какое-нибудь другое категорическое высказывание с терминами A и C.

Предметом теории категорического силлогизма является выяснение всех случаев, когда из двух посылок (в зависимости от расположения терминов в посылках и типа посылок) следует заключение. Из 256 возможных случаев только в 19 из посылок следует определенное заключение — это так называемые *модусы* категорического силлогизма.

Теория категорического силлогизма может быть построена и на теоретико-множественном языке (на языке логики классов), и на языке логики одноместных предикатов.

Мы не будем строить здесь эту теорию. Покажем лишь на отдельных примерах доказательство правильности модусов силлогизма средствами логики предикатов и установление неправильности силлогистических рассуждений с помощью диаграмм Венна.

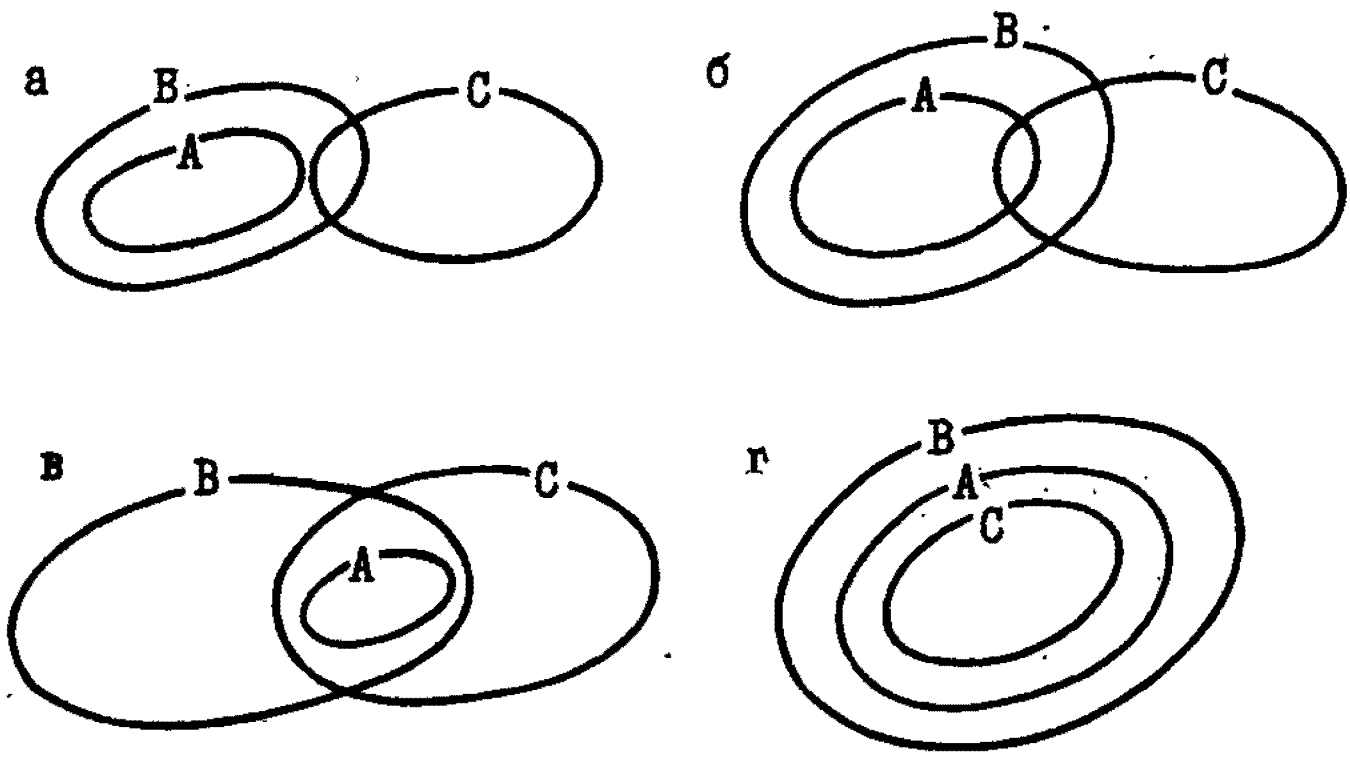


Рис. 30

1) Рассмотрим следующее рассуждение: «Все рациональные числа — вещественные; все целые числа — рациональные; следовательно, все целые числа — вещественные».

Пусть $C(x)$ — предикат $x \in C$; $R(x)$ — предикат $x \in R$; $D(x)$ — предикат $x \in D$. Тогда приведенное рассуждение запишется так:

$$(\forall x)\,[R(x) \Rightarrow D(x)],\ (\forall x)\,[C(x) \Rightarrow R(x)] \vdash (\forall x)\,[C(x) \Rightarrow D(x)].$$

Построим вывод заключения из посылок:

1. $(\forall x)[R(x) \Longrightarrow D(x)]$;	1. п;
2. $R(y) \Longrightarrow D(y)$;	2. ВЛ (1);
3. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow R(x)]$;	3. п;
4. $C(y) \Longrightarrow R(y)$;	4. ВЛ (3);
5. $C(y) \Longrightarrow D(y)$;	5. ПС (4, 2);
6. $(\forall x)[C(x) \Longrightarrow D(x)]$;	6. ВКО (5).

Этим доказана правильность, разумеется, не одного приведенного выше рассуждения, а любого рассуждения типа: «Все B суть C; все A суть B; следовательно, все A суть C», т. е.

$$(\forall x)[B(x) \Longrightarrow C(x)],\ (\forall x)[A(x) \Longrightarrow B(x)] \vdash (\forall x)[A(x) \Longrightarrow C(x)].$$

Правильность любого рассуждения такого типа иллюстрируется диаграммой (рис. 31).

Мы обосновали один из модусов силлогизма, который в традиционной логике обозначается латинским именем *Barbara* (три гласные этого слова *aaa* указывают, что посылки и заключение — высказывания типа a, т. е. общеутвердительные).

2) Рассмотрим рассуждение: «Ни одно вещественное число не есть мнимое; все рациональные числа — вещественные; следовательно, ни одно рациональное число не есть мнимое».

Отвлекаясь от конкретного содержания этого рассуждения, нам нужно доказать правильность любого рассуждения типа: «Ни одно B не есть C; все A суть B; следовательно, ни одно A не есть C», т. е.

$$(\forall x)[B(x) \Longrightarrow \overline{C}(x)],\ (\forall x)[A(x) \Longrightarrow B(x)] \vdash (\forall x)[A(x) \Longrightarrow \overline{C}(x)].$$

Нетрудно заметить, что это следование сводится к предыдущему, если заменить в нем $C(x)$ на $\overline{C}(x)$. Вывод заключения из посылок получается из предыдущего вывода с помощью той же замены.

Правильность любого рассуждения такого типа иллюстрируется диаграммой (рис. 32).

Мы обосновали еще один модус силлогизма, известный в традиционной логике под названием *Celarent* (тройка гласных *eae* этого слова указывает тип посылок и заключения, при этом посылка, содержащая предикат заключения (*бóльшая посылка*), указывается первой, а посылка, содержащая субъект заключения (*меньшая посылка*), — второй).

3) Рассмотрим рассуждение: «Все целые числа — рациональные; некоторые вещественные числа — целые; следовательно, некоторые вещественные числа — рациональные».

Отвлекаясь от конкретного содержания этого рассуждения, нам нужно доказать правильность любого рассуждения типа:

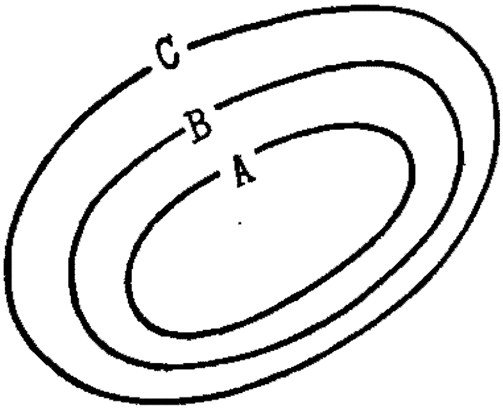


Рис. 31

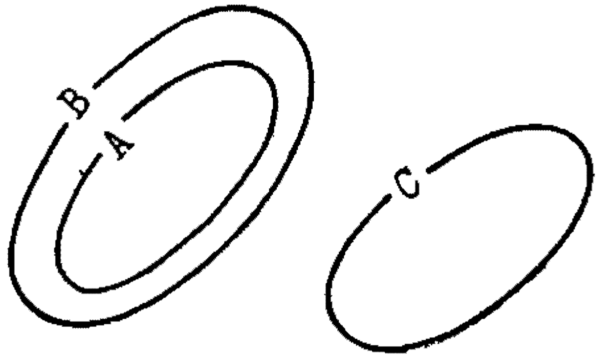


Рис. 32

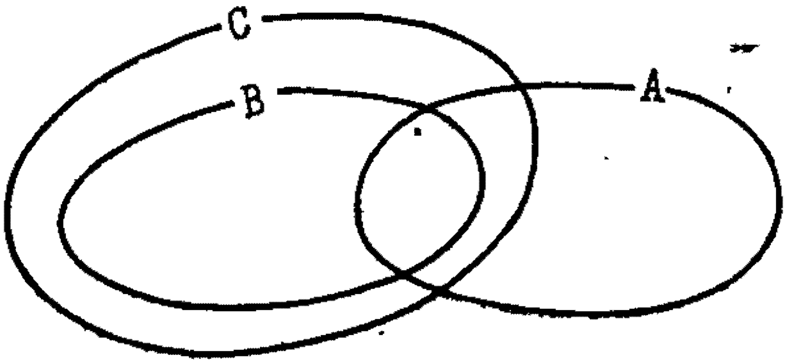


Рис. 33

«Все B суть C; некоторые A суть B; следовательно, некоторые A суть C», т. е.

$$(\forall x)\,[B(x) \Longrightarrow C(x)],\ (\exists x)\,[A(x) \wedge B(x)] \vdash (\exists x)\,[A(x) \wedge C(x)].$$

Правильность рассуждения такого типа иллюстрируется диаграммой (рис. 33).

Попытка построить вывод заключения из посылок для этого типа рассуждения приводит к необходимости введения еще двух правил вывода:

1. $(\exists x)\,[A(x) \wedge B(x)]$;	1. п;
2. $A(y) \wedge B(y)$;	2. ? (1);
3. $(\forall x)\,[B(x) \Longrightarrow C(x)]$;	3. п;
4. $B(y) \Longrightarrow C(y)$;	4. ВЛ (3);
5. $B(y)$;	5. УК (2);
6. $C(y)$;	6. ПЗ (4, 5);
7. $A(y)$;	7. УК (2);
8. $A(y) \wedge C(y)$;	8. ВК (7, 6);
9. $(\exists x)\,[A(x) \wedge C(x)]$;	9. ? (8).

а) Переход 1 — 2 требует схему вывода вида

$$\frac{(\exists x)\,P(x)}{P(y)},$$

т. е. вывод логической функции из высказывания о существовании. Этот вывод кажется приемлемым, поскольку высказывание о существовании $(\exists x)\,P(x)$ можно толковать, как существование подстановки, преобразующей $P(y)$ в истинное высказывание, хотя это не означает, что мы знаем или можем найти такое значение y.

Ясно, что имеется существенное различие между этой схемой вывода и ВЛ (выводом логической функции из общего высказывания). Прн выводе $P(y)$ из $(\forall x)\,P(x)$ на y не накладывается никакое ограничение; при выводе же $P(y)$ из $(\exists x)\,P(x)$ y не играет роль свободной переменной. В последнем случае к $P(y)$ нельзя применять ВКО, иначе можно доказать явно неправильное следование $(\exists x)\,P(x) \vdash (\forall x)\,P(x)$.

Исходя из указанного выше, вывод логической функции из высказывания о существовании назовем *ограниченным* и обозначим ОВЛ.

Таким образом, для конструирования выводов допускается правило ОВЛ, которое может быть сформулировано следующим образом.

Для логической функции $P(x)$ $\dfrac{(\exists x)\,P(x)}{P(y)}$, где y не является свободной переменной в каком-либо предшествующем шаге вывода, и не является свободной переменной ни в одной из посылок. К $P(y)$, полученной с помощью ОВЛ, неприменимо ВКО.

б) Для того чтобы узаконить переход 8 — 9, нужно допустить следующее правило *введения квантора существования* (*ВКС*): Для логической функции $P(x)$, если $\varphi_1 \quad \ldots, \quad \varphi_n \vdash P(x)$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash (\exists x)\, P(x)$.

Это правило легко установить с помощью уже известных нам правил.

С помощью ВЛ получаем

$$(\forall x)\, \overline{P}(x) \vdash \overline{P}(x)$$

и по ТД $\vdash (\forall x)\, \overline{P}(x) \Longrightarrow \overline{P}(x)$.

Применяя теперь ПК (правило контрапозиции), получаем

$$\vdash P(x) \Longrightarrow \overline{(\forall x)}\ \overline{P}(x),$$

или, так как $\overline{(\forall x)}\ \overline{P}(x) \equiv (\exists x)\, P(x)$,

$$\vdash P(x) \Longrightarrow (\exists x)\, P(x).$$

Из $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash P(x)$, по ТД получаем

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow P(x).$$

Из $\vdash \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow P(x)$ и $\vdash P(x) \Longrightarrow (\exists x)\, P(x)$ по ПС получаем $\vdash \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \Longrightarrow (\exists x)\, P(x)$, т. е. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash (\exists x)\, P(x)$.

После введения ОВЛ и ВКС приведенная выше последовательность формул 1 — 9 составляет вывод заключения $(\exists x)\,[A(x) \wedge C(x)]$ из посылок $(\forall x)\,[B(x) \Longrightarrow C(x)]$ и $(\exists x)\,[A(x) \wedge B(x)]$:

1. $(\exists x)\,[A(x) \wedge B(x)]$;	1. п;
2. $A(y) \wedge B(y)$;	2. ОВЛ (1);
3. $(\forall x)\,[B(x) \Longrightarrow C(x)]$	3. п;
4. $B(y) \Longrightarrow C(y)$;	4. ВЛ (3);
5. $B(y)$;	5. УК (2);
6. $C(y)$;	6. ПЗ (4, 5);
7. $A(y)$;	7. УК (2);

8. $A(y) \wedge C(y)$; 8. ВК (7, 6);

9. $(\exists x)[A(x) \wedge C(x)]$; 9. ВКС (8).

Мы обосновали модус силлогизма, известный в традиционной логике под названием *Darii* (тройка гласных *aii* этого слова указывает, что первая посылка — общеутвердительное высказывание, вторая посылка и заключение — частноутвердительные высказывания).

Введенные нами правила вывода достаточны для доказательства правильности и всех остальных модусов силлогизма.

4) Неправильность рассуждения типа силлогизма легко устанавливается с помощью диаграмм Венна. Если удается построить диаграмму, изображающую случай, когда обе посылки истинны, а заключение ложно, то рассматриваемое рассуждение неправильно.

Рассмотрим рассуждение: «Все ромбы — параллелограммы; некоторые четырехугольники не являются ромбами; следовательно, некоторые четырехугольники не являются параллелограммами».

Отвлекаясь от конкретного содержания этого рассуждения, мы хотим выяснить, правильно ли любое рассуждение типа: «Все *B* суть *C*; некоторые *A* не суть *B*; следовательно, некоторые *A* не суть *C*».

Возможность случая, когда обе посылки истинны, а заключение ложно, можно проиллюстрировать диаграммой.

Следовательно, любое рассуждение такого типа неправильно.

Упражнения

146. Правильность нижеследующих силлогизмов доказать построением вывода заключения из посылок и иллюстрировать с помощью диаграмм Венна:

а) Ни одио вещественное число не есть мнимое; некоторые комплексные числа — вещественные; следовательно, некоторые комплексные числа не являются мнимыми. (Модус *Ferio*.) б) Все квадраты — ромбы; некоторые прямоугольники не являются ромбами; следовательно, некоторые прямоугольники не являются квадратами. (Модус *Baroco*.) в) Ни одно мнимое число не является вещественным; некоторые комплексные числа — вещественные; следовательно, некоторые комплексные числа не являются мнимыми. (Модус *Festino*.) г) Ни одно мнимое число не есть вещественное; все рациональные числа — вещественные; следовательно, ни одно рациональное число не является мнимым. (Модус *Cesare*.) д) Все квадраты — правильные многоугольники; ни один разносторонний прямоугольник не есть правильный многоугольник; следовательно, ни один разносторонний прямоугольник не есть квадрат. (Модус *Camestres*.)

147. Установить неправильность нижеследующих рассуждений (с помощью диаграмм Венна):

а) Все целые числа — рациональные; некоторые дроби не являются целыми числами; следовательно, некоторые дроби не являются рациональными числами. б) Все ромбы — параллелограммы; все прямоугольники — параллелограммы; следовательно, все прямоугольники — ромбы. в) Некоторые вещественные числа — рациональные; некоторые рациональные числа не являются целыми; следовательно, некоторые вещественные числа не являются целыми. г) Ни одна трапеция не есть правильный многоугольник; ни один треугольник не есть трапеция; следовательно, ни один треугольник не есть правильный многоугольник.

148. Ответить (с помощью диаграмм Венна), предварительно записав посылку и предполагаемое заключение на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение.

Посылка	Заключенне
а) Все A суть B	1) Все B суть A; 2) Некоторые B суть A; 3) Некоторые B не суть A; 4) Некоторые A суть B?
б) Некоторые A суть B	1) Некоторые A не суть B; 2) Некоторые B суть A; 3) Некоторые B не суть A?
в) Ни одно A не есть B	1) Ни одно B не есть A; 2) Некоторые A не суть B; 3) Некоторые B не суть A?
г) Некоторые A не суть B	1) Некоторые B не суть A; 2) Ни одно B не есть A; 3) Некоторые B суть A; 4) Некоторые A суть B?

149. По заданным значениям истинности какого-нибудь одного из высказываний *a*, *e*, *i*, *o* определить значения истинности высказываний других типов (того же содержания). Заполнить таблицу (если данное значение истинности высказывания не определяет однозначно значение истинности другого высказывания, то ставится знак вопроса, так как это показано в таблице для случая, когда *e* имеет значение Л):

Дано				Следует			
a	*e*	*i*	*o*	*a*	*e*	*i*	*o*
И	—	—	—				
Л	—	—	—				
—	И	—	—				
—	Л	—	—	?	Л	И	?
—	—	И	—				
—	—	Л	—				
—	—	—	И				
—	—	—	Л				

150. Ответить (с помощью диаграмм Венна), предварительно записав посылки и предполагаемые заключения на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение.

Посылки	Заключение
а) Все *B* суть *C*; все *B* суть *A*	1) Все *A* суть *C*; 2) Некоторые *A* суть *C*; 3) Все *C* суть *A*; 4) Некоторые *C* суть *A*?

Посылки	Заключение
б) Все B суть C; ни одно B не есть A	1) Ни одно C не есть A; 2) Некоторые C не суть A; 3) Ни одно A не есть C; 4) Некоторые A не суть C?
в) Все C суть B; все A суть B	1) Все A суть C; 2) Некоторые A суть C; 3) Все C суть A; 4) Некоторые C суть A?
г) Все C суть B; ни одно A не есть B	1) Ни одно C не есть A; 2) Некоторые C не суть A; 3) Ни одно A не есть C; 4) Некоторые A не суть C?

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ

§ 21. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

21.1. Состав математического предложения. Всякое математическое предложение состоит только из математических и логических терминов или заменяющих их символов. Математические термины (или символы) обозначают объекты, изучаемые математической теорией, которой принадлежит данное предложение. Логические термины (или символы) обозначают логические операции, с помощью которых из математических терминов образуются предложения и из одних предложений конструируются другие предложения.

Рассмотрим несколько предложений, встречающихся в школьной геометрии.

Прямая имеет вид туго натянутой нити. (1)

Для любых двух точек существует прямая, проходящая через них. (2)

Квадрат есть ромб с прямым углом. (3)

Если многоугольник — правильный, то около него можно описать окружность. (4)

Если около многоугольника можно описать окружность, то этот многоугольник правильный. (5)

Предложения (2) — (5) состоят только из геометрических и логических терминов, поэтому естественно их считать геометрическими предложениями (выраженными на языке теории, известной под названием «Элементарная геометрия»).

Предложение (1) не является геометрическим, так как оно содержит, кроме геометрических и логических, еще другие термины (вид, туго натянутая нить).

(На вопрос, какую роль в школьной геометрии играет это не принадлежащее геометрической теории предложение, мы ответим несколько позднее.)

Рассмотрим вопрос: что известно из школьной геометрии о предложениях (2) — (5)?

О предложении (2) известно, что оно принимается за «аксиому»; предложение (3) является «определением» квадрата; предложение (4) — «теорема», оно «доказывается»; о предложении (5) обычно говорят (неправильно), что оно является «теоремой, обратной теореме (4)», и что «эта обратная теорема неверна» (вместо «(5) — предложение, обратное (4)», и «это обратное предложение не является теоремой»).

Таким образом, хотя все предложения (2) — (5) — геометрические, выражаются на языке элементарной геометрии, они играют в ней различные роли.

Ниже мы уточним понятия «определение», «аксиома», «теорема».

21.2. Определение понятия. Каждое понятие объединяет в себе множество предметов или отношений (*объем* этого понятия) и характеристическое свойство, присущее всем элементам этого множества и только им (*содержание* понятия).

Например, понятие «квадрат» соединяет в себе множество всевозможных квадратов (объем этого понятия) с характеристическим свойством — наличие четырех сторон, четырех вершин, четырех прямых углов (содержание понятия).

Содержание понятия раскрывается с помощью определения.

Имеются различные способы определения понятия. Мы рассмотрим здесь наиболее часто встречающееся в математике формально-логическое определение (известное в традиционной логике под названием определения «через ближайший род и видовое отличие»).

Сущность этого определения в следующем.

Если в множестве A имеются элементы, обладающие некоторым свойством P, и элементы, не обладающие этим свойством, то свойство P осуществляет разбиение множества A на два класса:

$$B = \underset{x}{M}\,[x \in A \wedge P(x)] \text{ и } \overline{B} = \underset{x}{M}\,[x \in A \wedge \overline{P}(x)].$$

С помощью свойства P мы выделили из множества A подмножество B (на языке традиционной логики мы определили понятие B указанием «родового понятия A» и «видового признака (или отличия) P»).

Если A — множество ромбов, а $P(x)$: «x имеет прямой угол», то B — множество квадратов, $B = \underset{x}{M}\,[x \in A \wedge \wedge P(x)]$ — определение квадрата.

Этим определением понятие квадрат сводится к другому понятию ромб, его содержание состоит из содержания понятия ромб, дополненного еще одним свойством (наличием прямого угла). В свою очередь понятие ромб определяется через понятие параллелограмм, понятие параллелограмм — через понятие четырехугольник и т. д. Но до каких пор «и т. д.»?

Совершенно ясно, что процесс сведения одного понятия ко второму, второго — к третьему, третьего — к четвертому и т. д. не может быть бесконечным. Поэтому в элементарной геометрии (да и в рамках любой другой математической теории) отказываются от попытки «все определять» и некоторые понятия объявляются *первичными* (первоначальными, основными), не определяемыми через другие.

В качестве первичных понятий в элементарной геометрии могут быть приняты: множество геометрических элементов (точек, прямых и плоскостей) и отношения «принадлежит» («инцидентно»), «между» и «равно» («конгруэнтно»).

Однако известны построения теории элементарной геометрии на базе других систем первичных понятий (в этих построениях некоторые из перечисленных выше понятий являются определяемыми).

Первичные понятия, не определяемые через другие понятия данной теории, получают «косвенное определение» с помощью системы «аксиом» этой теории.

21.3. Аксиомы и теоремы. В обыденной речи термин «аксиома» часто применяется в смысле «очевидная истина, не требующая доказательства». Однако в математике этот термин имеет совершенно иной смысл.

Уточнение понятий «аксиома» и «теорема», так же как и понятия «доказательство» (которое рассматривается дальше), невозможно без рассмотрения вопроса о том, что представляет собой *аксиоматическая теория.*

Этот вопрос является предметом Оснований математики и мы рассматриваем его здесь бегло и в предварительном порядке, в той мере, в какой это нам необходимо для уточнения указанных выше понятий. Мы также не будем касаться истории развития аксиоматического метода, представляющей большой интерес.

Каждая математическая теория описывает некоторое множество объектов с введенными в него отношениями или операциями, а точнее *структуру*, определяемую в этом множестве введенными в него отношениями или операциями (или теми и другими).

Так, элементарная геометрия описывает структуру множества геометрических элементов (точек, прямых и плоскостей), определяемую в нем отношениями «инцидентно», «между», «конгруэнтно».

Арифметика натуральных чисел описывает структуру, определяемую в множестве N отношением « $<$ » (меньше) и операциями « $+$ » (сложения) и « $\cdot$ » (умножения).

Это описание может быть осуществлено на различных уровнях: в виде «интуитивной теории», «содержательной (неформальной) аксиоматической теории» и «формальной аксиоматической теории».

Интуитивная теория представляет собой множество предложений, выражающих свойства изучаемой структуры, истинность которых устанавливается «интуитивно», на базе непосредственных наблюдений и опыта. Такая интуитивная теория вообще еще не считается «математической» теорией в собственном смысле этого слова. Однако она всегда предшествует математической теории, является ее источником.

Математическая теория представляет собой множество предложений, описывающее изучаемую структуру и определенным образом *упорядоченное* отношением логического следования. Последнее означает, что некоторые предложения множества принимаются за исходные (*аксиомы*) так, чтобы все остальные предложения этого множества (*теоремы*) логически следовали из них.

Обычно математические теории строятся как «содержательные (неформальные)» аксиоматические теории, предложения которых выражаются на естественном, словесном языке (с использованием, разумеется, соответствующих математических терминов и символов), а доказательства теорем представляют собой обычные рассуждения, в которых используемые логические средства вывода не фиксируются (используется «интуитивная» логика).

Так, в частности, обычно строятся и элементарная геометрия, и арифметика натуральных чисел, и другие математические теории.

Но эти же математические теории могут быть построены как «формальные» аксиоматические теории на базе определенной, фиксированной логической системы. Для построения многих «формальных» математических теорий в качестве базовой логической системы применяется логика предикатов (с равенством).

Следует отметить, что при этом сама логика предикатов строится как формальная аксиоматическая система, т. е. из множества общезначимых формул выделяются некоторые исходные (аксиомы), из которых все остальные получаются с помощью некоторых исходных правил вывода.

В таком случае логика предикатов дополняется первичными понятиями математической теории: индивидуальными предметами и предикатами. Специфика этих предметов и предикатов описывается определенными предложениями, множество которых составляет *систему аксиом* теории. Эти аксиомы, так же как выводимые из них средствами логики предикатов теоремы, выражаются формулами логики предикатов, не являющимися общезначимыми. Эти формулы обращаются в истинные высказывания лишь для определенного класса предметных областей, обладающих однородными структурами, описываемыми данной теорией.

Поясним описанные выше в общих чертах три типа теорий на одном достаточно простом примере.

Рассмотрим на трех уровнях (интуитивном, содержательно-аксиоматическом и формально-аксиоматическом) фрагмент элементарной геометрии, предметом которого является изучение структуры множества точек и прямых (плоскости) с одним отношением «инцидентно» («лежит на», «проходит через»), применимым к точке и прямой.

1. Интуитивный уровень. Непосредственно рассматривая множество точек и прямых на плоскости при

обычном представлении о точке как о «следе», оставляемом мелом на доске или карандашом на бумаге, и о прямой, как имеющей вид «туго натянутой нити», и обычном понимании слов «лежит на», или «проходит через», мы обнаруживаем целый ряд свойств: через любые две точки проходит прямая и только одна; на каждой прямой имеется по крайней мере две точки; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой; любые две различные прямые или не имеют ни одной общей точки, или имеют только одну общую точку (не имеют более одной общей точки) и др.

Получаемое таким образом множество предложений, описывающее структуру, определяемую в множестве точек и прямых плоскости отношением «лежит на» («проходит через»), составляет интуитивную теорию принадлежности (инцидентности) плоскости.

2. Содержательно-аксиоматический уровень. Вводятся первичные понятия: «точка», «прямая» и отношение «лежит на» («проходит через» или «инцидентно»), характеризуемые следующими аксиомами:

п. 1. Через любые две точки проходит прямая;

п. 2. Через любые две различные точки проходит не более одной прямой;

п. 3. Для любой прямой имеются по крайней мере две лежащие на ней точки;

п. 4. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

(Эти аксиомы обычно называют аксиомами принадлежности (или инцидентности), поэтому мы их обозначили буквой «п».)

Другое свойство, «подсказываемое» нам интуитивной теорией, является уже здесь теоремой.

Теорема. Две различные прямые не могут иметь более одной общей точки.

Доказательство. Если предположить, что две различные прямые имеют две общие точки, то получится, что через эти две точки проходят две различные прямые, что противоречит аксиоме п. 2.

(Мы не будем описывать дальнейшее развитие этой содержательной аксиоматической теории, в которой дальше определяется отношение пересечения прямых, параллельности прямых, вводится еще одна аксиома, аксиома параллельных, и доказываются новые теоремы.)

3. Формально-аксиоматический уровень. Первичные, неопределяемые понятия: «точка», «прямая» и бинарное отношение (двуместный предикат) «инцидентно», применимое к точке и прямой.

Обозначения: предметные постоянные: A, B, C, ... — точки; a, b, c, ... — прямые; предметные переменные: X, Y, Z — переменные для точек; x, y, z — переменные для прямых (вместо введения двух категорий предметных переменных для точек и для прямых можно ввести два одноместных предиката: $T(x)$ — «x — точка» и $P(x)$ — «x — прямая»); предикатная постоянная: $\divideontimes$, т. е. $A \divideontimes a$ обозначает «точка A инцидентна прямой a».

(Для большей компактности записей мы будем пользоваться следующими сокращениями: $A,\ B \divideontimes a$ вместо $A \divideontimes a \wedge B \divideontimes a$; $A \divideontimes a,\ b$ вместо $A \divideontimes a \wedge A \divideontimes b$; $A, B \divideontimes a,\ b$ вместо $A \divideontimes a \wedge A \divideontimes b \wedge B \divideontimes a \wedge B \divideontimes b$.)

Предикат $\divideontimes$ характеризуется следующими четырьмя аксиомами:

п. 1. $(\forall X, Y)\ (\exists x)\ [X,\ Y \divideontimes x]$;

п. 2. $(\forall X, Y)(\forall x, y)\ [\overline{X = Y} \wedge X,\ Y \divideontimes x,\ y \Longrightarrow x = y]$;

п. 3. $(\forall x)(\exists X, Y)\ [\overline{X = Y} \wedge X,\ Y \divideontimes x]$;

п. 4. $(\exists X, Y, Z)(\forall x)\ [\overline{X,\ Y,\ Z \divideontimes x}]$.

Множество предложений, выводимых из аксиом п. 1 — п. 4 средствами логики предикатов с равенством составляет *теорию инцидентности (принадлежности)* плоскости.

Приведем в качестве примера доказательство теоремы:

$$\text{Т.1.}\ (\forall x,\ y)(\forall X,\ Y)[\overline{x = y} \wedge X,\quad Y \ast x,\ y \Longrightarrow X = Y]$$

(для любых двух различных прямых не существует более одной точки, инцидентной им).

Доказательство.

1. $(\forall X,\ Y)(\forall x,\ y)[\overline{X = Y} \wedge$ $\wedge X,\ Y \ast x,\ y \Longrightarrow x = y]$;	1. п. 2;
2. $\overline{X = Y} \wedge X,\ Y \ast x,\ y \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x = y$;	2. ВЛ (1);
3. $\overline{x = y} \wedge X,\ Y \ast x,\ y \Longrightarrow$ $\Longrightarrow X = Y$;	3. ПРК (2);
4. $(\forall x,\ y)(\forall X,\ Y)[\overline{x = y} \wedge X,\ Y \ast$ $\ast x,\ y \Longrightarrow X = Y]$.	4. ВКО (3).

Как видно, это доказательство представляет собой последовательность формул (предложений теории), каждая из которых либо аксиома (посылка), либо получается из предшествующих по какому-либо правилу вывода (логики предикатов), а последняя формула — доказываемая теорема.

Любая формула, выраженная на языке данной теории (т. е. формула логики предикатов, содержащая предикатную постоянную $\ast$, переменные или постоянные для точек и прямых) является *теоремой* этой теории, если для нее существует хотя бы одно доказательство в указанном выше смысле.

(При таком понимании теоремы каждая аксиома тоже является теоремой теории. Ее доказательство состоит из самой этой аксиомы.)

Отметим весьма существенную особенность формальной аксиоматической теории. При построении такой теории полностью отвлекаются от конкретной природы первичных понятий, в нашем примере — от конкретной природы точек и прямых и конкретного смысла отношения «инцидентно». В таком случае теория инцидентности описывает структуру не только того конкретного множества точек и прямых, о котором шла речь в интуитивной теории, но и любого другого множества объектов двух категорий, которые можно условно называть «точками» и «прямыми», обладающего такой же структурой.

Например, дадим первичным понятиям «точка», «прямая», «инцидентно» следующее толкование:

«точки» — цифры 1, 2, 3;

«прямые» — множества цифр $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$;

отношение «инцидентно» ($*$) — теоретико-множественное отношение принадлежности предмета к множеству ($\in$).

Нетрудно проверить, что в выбранной системе объектов выполняются (истинны) все аксиомы п. 1 — п. 4. Действительно, для любых двух точек существует прямая, которой эти точки инцидентны (выполняется п. 1), и не существует более одной такой прямой (выполняется п. 2), и для любой прямой существуют две (различные) точки, инцидентные ей (выполняется п. 3), и существуют три точки, неинцидентные одной прямой (выполняется п. 4).

Такая система объектов (в данном случае состоящая из множества «точек» и «прямых» с введенным в него отношением «инцидентно»), для которой все аксиомы п. 1 — п. 4 являются истинными высказываниями, называется *моделью системы аксиом* п. 1 — п. 4.

Таким образом, система аксиом п. 1 — п. 4 допускает и модели, отличные от той (естественной, элементарно-геометрической), для которой строилась первоначально интуитивная теория и в которой прямая имела вид «туго натянутой нити».

Отметим, что внутри аксиоматической теории (содержательной или формальной), к ее предложениям не применимо понятие значения истинности. Теорема не может быть истинной или ложной (верной или неверной). Всякое предложение, выраженное в терминах некоторой теории, может быть теоремой этой теории (выводимой из ее аксиом) или не быть таковой. По отношению же к какой-нибудь модели аксиомы и теоремы становятся истинными высказываниями, а предложения, не являющиеся теоремами, — ложными.

Так, приведенное в 21.1 предложение (5) является геометрическим лишь в том смысле, что выражено в геометрических терминах (на языке элементарной геометрии), но оно не принадлежит этой теории, не является ее теоремой. По отношению же к модели, в которой строится школьная геометрия, это предложение — ложное высказывание.

В связи с построением аксиоматических теорий возникают глубокие проблемы, составляющие предмет Оснований математики, где современная математическая логика находит широкое применение.

Теперь возвратимся к вопросу об уточнении понятий «аксиома» и «теорема».

Из предыдущего следует, что аксиомы и теоремы — предложения аксиоматической теории, причем аксиомы — исходные предложения теории, теоремы — предложения, выводимые из аксиом.

Таким образом, аксиомы не доказываются вовсе не потому, что «они очевидны и не требуют доказательства», а потому, что они — исходные предложения теории (и поэтому невыводимы из других предложений этой теории, хотя «выводимы из самих себя»).

21.4. Обратные и противоположные предложения и теоремы. Математические предложения часто формулируются в виде импликаций.

Если импликация $p \Longrightarrow q$ выражает некоторую теорему, то основание p импликации называется *условием*, а следствие q — *заключением* теоремы.

Для импликации

$$p \Longrightarrow q \tag{1}$$

мы определим еще три импликации следующим образом:

а) Если в (1) поменять местами основание p и следствие q, получим предложение

$$q \Longrightarrow p, \tag{2}$$

называемое *обратным* по отношению к предложению (1).

б) Если в (1) заменить p и q своими отрицаниями $\overline{p}$ и $\overline{q}$ соответственно, получим предложение

$$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}, \tag{3}$$

называемое *противоположным* по отношению к предложению (1).

в) Если в (1) произвести одновременно преобразования, указанные в а) и б), получим предложение

$$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}, \tag{4}$$

называемое *контрапозитивным* (противоположно-обратным, или обратно-противоположным) по отношению к предложению (1).

Нетрудно заметить, что предложения (1) и (4), (2) и (3) равносильны: $p \Longrightarrow q \equiv \overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$; $q \Longrightarrow p \equiv \overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ (эти равносильности выражают закон контрапозиции, на котором основано правило контрапозиции (ПК)).

Таким образом, если $p \Longrightarrow q$ — теорема какой-нибудь теории, то и $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ — теорема этой же теории (доказательство теоремы $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ получается из доказательства теоремы $p \Longrightarrow q$ добавлением одной строки, основанной на ПК), называемая контрапозитивной (противоположно-обратной или обратно-противоположной) теоремой по отношению к теореме $p \Longrightarrow q$, и обратно.

Так, например, предложение «Если многоугольник — правильный, то около него можно описать окружность» — теорема элементарной геометрии. Поэтому и контрапозитивное предложение «Если около многоугольника нельзя описать окружность, то многоугольник не есть правильный» тоже теорема элементарной геометрии.

Если $p \Longrightarrow q$ — теорема некоторой теории, то обратное предложение $q \Longrightarrow p$ может и не быть теоремой этой теории. Это хорошо известно из школьной математики, где встречается много примеров, когда предложение, обратное некоторой теореме, также является теоремой *(обратной теоремой)*, и много примеров, когда обратное предложение не является теоремой. В приведенном выше примере обратное предложение «Если около многоугольника можно описать окружность, то этот многоугольник — правильный» не является теоремой.

Во многих случаях математические теоремы имеют вид импликаций $\varphi \Longrightarrow \psi$, в которых основание или следствие имеет сложную структуру. В таких случаях представляется целесообразным расширить понятие обратного предложения.

Чаще всего в математических теоремах условия (иногда и заключения) выражаются в виде конъюнкции, реже — в виде дизъюнкции. Если же условие (или заключение) содержит знак импликации, то его сводят к другим операциям.

Например, если теорема сформулирована в виде импликации

$$p_1 \Longrightarrow (p_2 \Longrightarrow q),$$

то ее можно представить в равносильной формулировке

$$p_1 p_2 \Longrightarrow q. \tag{5}$$

Пусть p_1 обозначает: $a \parallel b$, p_2 — $a \perp \alpha$ и q — $b \perp \alpha$.

Тогда теорема

$$a \parallel b \Longrightarrow (a \perp \alpha \Longrightarrow b \perp \alpha)$$

(если две прямые параллельны, то из того, что одна из них перпендикулярна плоскости α, следует, что и вторая перпендикулярна этой плоскости) может быть сформулирована и так:

$$a \parallel b \wedge a \perp \alpha \Longrightarrow b \perp \alpha$$

(если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна плоскости α, то и вторая перпендикулярна этой плоскости).

Если исходить из приведенного выше определения обратного предложения, то для (5) имеется одно обратное предложение

$$q \Longrightarrow p_1 p_2. \tag{6}$$

В нашем примере это предложение

$$b \perp \alpha \Longrightarrow a \parallel b \wedge a \perp \alpha$$

не является теоремой (оно явно абсурдно, если учесть, что имеется в виду общее предложение $(\forall a, b, \alpha)[b \perp \alpha \Longrightarrow a \parallel b \wedge a \perp \alpha]$).

Однако предложения

$$a \parallel b \wedge b \perp \alpha \Longrightarrow a \perp \alpha \, (p_1 q \Longrightarrow p_2); \tag{7}$$

$$a \perp \alpha \wedge b \perp \alpha \Longrightarrow a \parallel b \, (p_2 q \Longrightarrow p_1) \tag{8}$$

являются теоремами ((7) не выражает существенно новой теоремы по отношению к (5), (8) описывает новую ситуацию: «если две прямые перпендикулярны к одной плоскости, то они параллельны»).

Таким образом, для предложения типа (5) целесообразно расширить понятие обратного предложения и отнести к обратным наряду с предложением (6) предложения (7) и (8).

Каждое из предложений (7) и (8) следует из предложения (6). Докажем это для (7), т. е. что

$$q \Longrightarrow p_1 p_2 \vdash p_1 q \Longrightarrow p_2.$$

Согласно ТД достаточно доказать, что

$$q \Longrightarrow p_1 p_2,\ p_1 q \vdash p_2.$$

1. $p_1 q$;	1. п;
2. q;	2. УК (1);
3. $q \Longrightarrow p_1 p_2$;	3. п;
4. $p_1 p_2$;	4. ПЗ (2, 3);
5. p_2.	5. УК (4).

Доказательство для (8) совершенно аналогично.

Таким образом, если (6) — теорема (обратная (5)), то (7) и (8) не дают существенно новых обратных теорем. В нашем примере (6) не является теоремой, (7) не дает существенно новой по отношению к (5) теоремы, а (8) — теорема, отличная от (5).

Вообще, если предложение имеет вид

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Longrightarrow q, \tag{9}$$

то к обратным относят все предложения, которые могут быть получены из (9), если поменять местами заключение и любую часть условия.

Таким образом, всего обратных предложений будет столько, сколько частей имеет множество $\{p_1, \ldots, p_n\}$ элементарных членов конъюнкции, не включая пустую часть, т. е. $2^n - 1$. Разумеется, не все эти обратные предложения независимы, некоторые из них являются следствиями других (как мы это видели для $n = 2$).

Когда имеется теорема типа (9), то интерес представляют лишь те обратные теоремы, которые не следуют из других обратных теорем (наиболее «сильные» обратные теоремы).

Рассмотрим случай, когда условие теоремы представляет собой дизъюнкцию:

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \Longrightarrow q.$$

Обратным предложением будет

$$q \Longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} p_i.$$

Но так как

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \Longrightarrow q \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bar{p}_i \vee q;$$

$$\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} (\bar{p}_i \vee q);$$

$$\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} (p_i \Longrightarrow q),$$

то по существу данная теорема распадается на n теорем вида

$$p_1 \Longrightarrow q, \; p_2 \Longrightarrow q, \; \ldots, \; p_n \Longrightarrow q.$$

Для каждого из этих предложений $p_i \Longrightarrow q$ имеется обратное: $q \Longrightarrow p_i$, которое целесообразно отнести к предложениям, обратным данному. Например, для $p_1 \vee p_2 \Rightarrow q$ имеются три (неравносильных) обратных предложения:

$$q \Rightarrow p_1 \vee p_2; \qquad (10)$$

$$q \Rightarrow p_1; \qquad (11)$$

$$q \Rightarrow p_2. \qquad (12)$$

Так как (10) следует из (11) или (12), то если (11) или (12) — теорема, то (10) тоже теорема, но не представляет интереса и опускается. Если (11) и (12) — обе теоремы, то их можно объединить в одну:

$$\begin{aligned}(q \Rightarrow p_1) \wedge (q \Rightarrow p_2) &\equiv (\bar{q} \vee p_1) \wedge (\bar{q} \vee p_2);\\ &\equiv \bar{q} \vee \bar{q}p_1 \vee \bar{q}p_2 \vee p_1p_2;\\ &\equiv \bar{q}\,(\text{И} \vee p_1 \vee p_2) \vee p_1p_2;\\ &\equiv \bar{q} \vee p_1p_2;\\ &\equiv q \Rightarrow p_1p_2.\end{aligned}$$

21.5. Принцип полной дизъюнкции. При определенных условиях из серии теорем

$$p_1 \Rightarrow q_1,\ p_2 \Rightarrow q_2,\ \ldots,\ p_n \Rightarrow q_n$$

следуют все обратные им теоремы.

Рассмотрим пример. Обозначим через a, b, c стороны треугольника, лежащие против углов A, B, C соответственно.

Из элементарной геометрии известны теоремы:

$$p_1 \Rightarrow q_1:\ \angle C = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2; \qquad (1)$$

$$p_2 \Rightarrow q_2:\ \angle C < 90^0 \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2; \qquad (2)$$

$$p_3 \Rightarrow q_3:\ \angle C > 90^\circ \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2. \qquad (3)$$

Заметим, что условия этих теорем исчерпывают все возможные случаи, т. е. дизъюнкция этих условий $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ истинна, а заключения попарно несовместны, т. е. $\bar{q}_1 \vee \bar{q}_2$, $\bar{q}_1 \vee \bar{q}_3$, $\bar{q}_2 \vee \bar{q}_3$.

При этих условиях все три обратных предложения будут теоремами:

$$q_1 \Rightarrow p_1\colon \quad c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \angle C = 90^\circ; \qquad (1')$$
$$q_2 \Rightarrow p_2\colon \quad c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \angle C < 90^\circ; \qquad (2')$$
$$q_3 \Rightarrow p_3\colon \quad c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow \angle C > 90^\circ. \qquad (3')$$

Эти обратные теоремы выводимы из данных и указанных выше условий. Докажем это для $q_1 \Rightarrow p_1$, т. е. что

$$p_1 \Rightarrow q_1,\ p_2 \Rightarrow q_2,\ p_3 \Rightarrow q_3,\ p_1 \vee p_2 \vee p_3,\ \bar{q}_1 \vee \bar{q}_2,\ \bar{q}_1 \vee \bar{q}_3,\ \bar{q}_2 \vee \vee \bar{q}_3 \vdash q_1 \Rightarrow p_1$$

(доказательство того, что (2′) и (3′) следуют из этих же посылок, совершенно аналогично).

Согласно ТД достаточно доказать, что

$$p_1 \Rightarrow q_1,\ p_2 \Rightarrow q_2,\ p_3 \Rightarrow q_3,\ p_1 \vee p_2 \vee p_3,\ \bar{q}_1 \vee \bar{q}_2,\ \bar{q}_1 \vee \bar{q}_3,\ \bar{q}_2 \vee \vee \bar{q}_3,\ q_1 \vdash p_1.$$

1. q_1;	1. п;
2. $\bar{q}_1 \vee \bar{q}_2$;	2. п;
3. $\bar{q}_2$;	3. УД (2, 1);
4. $p_2 \Rightarrow q_2$;	4. п;
5. $\bar{p}_2$;	5. ПО (4, 3);
6. $\bar{q}_1 \vee \bar{q}_3$;	6. п;
7. $\bar{q}_3$;	7. УД (6, 1);
8. $p_3 \Rightarrow q_3$;	8. п;
9. $\bar{p}_3$;	9. ПО (8, 7);
10. $p_1 \vee p_2 \vee p_3$;	10. п;
11. $p_1 \vee p_2$;	11. УД (10, 9);
12. p_1;	12. УД (11, 5).

21. 6. Необходимые и достаточные условия. Уточним смысл часто применяющихся в математике выражений «необходимое условие», «достаточное условие» и составленные из них «необходимое и достаточное условие», «необходимое, но недостаточное условие», «достаточное, но не необходимое условие».

Рассмотрим несколько примеров.

1) Говорят, что пропорциональность сторон — **необходимое условие** подобия двух треугольников. Это надо понимать так: если это условие не выполняется, т. е. стороны не пропорциональны, то треугольники не будут подобными. Иначе говоря, если ложно высказывание p: «стороны треугольников пропорциональны», или истинно его отрицание $\bar{p}$, то ложно и высказывание q: «треугольники подобны», или истинно его отрицание $\bar{q}$, т. е. истинно высказывание

$$\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}, \tag{1}$$

или равносильное ему высказывание

$$q \Longrightarrow p. \tag{2}$$

2) Говорят также, что пропорциональность сторон — **достаточное условие** подобия двух треугольников. Это надо понимать так: если это условие выполняется, то треугольники подобны, т. е. если истинно высказывание p: «стороны треугольников пропорциональны», то истинно и высказывание q: «треугольники подобны». Иначе говоря, это означает, что истинно высказывание

$$p \Longrightarrow q. \tag{3}$$

3) Из предыдущего следует, что пропорциональность сторон — **необходимое и достаточное условие** подобия двух треугольников, а это означает, что истинно высказывание $(\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}) \wedge (p \Longrightarrow q)$, или равносильное высказывание $(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow q)$.

Но высказывание $(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow q)$ равносильно эквиваленции $p \Longleftrightarrow q$. Следовательно, выражение «p необходимое и достаточное условие для q» имеет тот же смысл, что «p если и только если q», или «p тогда и только тогда, когда q».

4) Говорят, что пропорциональность сторон — **необходимое, но недостаточное условие** подобия многоугольников. Это означает, что если стороны непропорциональны, то многоугольники неподобны, но неверно, что если стороны пропорциональны, то многоугольники подобны (квадрат и непрямоугольный ромб неподобны, хотя стороны их пропорциональны).

Если обозначить через p высказывание «стороны пропорциональны» и через q высказывание «многоугольники подобны», то выражение «p необходимое, но недостаточное условие для q» означает, что истинно высказывание $(\bar{p} \Longrightarrow \bar{q})\,\overline{p \Longrightarrow q}$, или равносильное высказывание $(q \Longrightarrow p)\,p\bar{q}$.

5) Говорят, что правильность многоугольника — **достаточное, но необходимое условие**, для того чтобы около него можно было описать окружность. Это означает, что если многоугольник — правильный, то около него можно описать окружность, но неверно, что если он неправильный, то около него нельзя описать окружность (существуют и неправильные многоугольники, около которых можно описать окружность).

Если обозначить через p высказывание «многоугольник — правильный» и через q высказывание «около многоугольника можно описать окружность», то выражение «p достаточное, но не необходимое условие для q» означает, что истинно высказывание

$$(p \Longrightarrow q)\,\overline{\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}}, \text{ или } (p \Longrightarrow q)\,\bar{p}q.$$

Необходимое и достаточное условие в математике часто называют *признаком.*

Признак обычно формулируется с помощью слов **«необходимо и достаточно»**, или в виде эквиваленции, которая, как известно, представима в виде конъюнкции двух импликаций. Одна из этих импликаций выражает теорему, доказывающую **необходимость** признака, другая выражает теорему, доказывающую **достаточность** признака.

Например, признак перпендикулярности двух плоскостей: «Для того чтобы две плоскости были перпендикулярными, **необходимо и достаточно**, чтобы одна из них проходила через прямую, перпендикулярную другой» может быть сформулирован и так: «Две плоскости перпендикулярны, **если и только если** одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой», т. е. в виде эквиваленции

$$\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow (\exists a)\,[a \subset \alpha \wedge a \perp \beta].$$

Но эта эквиваленция равносильна конъюнкции двух импликаций:

$$(\alpha \perp \beta \Longrightarrow (\exists a)\,[a \subset \alpha \wedge a \perp \beta]) \wedge ((\exists a)\,[a \subset \alpha \wedge a \perp \beta] \Longrightarrow \alpha \perp \beta),$$

первая из которых выражает теорему, доказывающую необходимость признака, вторая — теорему, доказывающую его достаточность.

Упражнения

151. В чем сущность ошибок в нижеследующих определениях:

а) Параллелограмм есть многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. б) Параллелограмм есть четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны. в) Параллельными называются прямые, не имеющие общей точки. г) Прямоугольник есть четырехугольник с равными диагоналями. д) Иррациональными называются такие числа, которые не являются рациональными. е) Квадрат, сторона которого равна какой-нибудь линейной единице, называется квадратной единицей. ж) Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник. з) Подобными называются такие многоугольники, которые имеют одинаковую форму.

152. Записать все возможные обратные предложения для каждого из нижеследующих:

а) $p_1p_2p_3 \Longrightarrow q$; б) $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Longrightarrow q$; в) $p_1p_2 \Longrightarrow q_1q_2$; г) $p_1 \vee p_2 \Longrightarrow q_1q_2$; д) $p_1p_2 \Longrightarrow q_1 \vee q_2$; е) $p_1 \vee p_2 \Longrightarrow q_1 \vee q_2$.

153. Для каждой из нижеследующих геометрических теорем после записи ее в виде формулы на логико-математическом языке записать все обратные предложения и выяснить, какие из них являются теоремами (элементарной геометрии):

а) Если две прямые параллельны, то всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую. б) Если прямая a не лежит в плоскости α и параллельна какой-нибудь прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α. в) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны. г) Если целое число делится на 15, то оно делится на 3 и делится на 5.

154. Доказать, что предложение, противоположное любому из обратных по отношению к предложению

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Longrightarrow q$$

(любое из контрапозитивных), равносильно данному предложению.

155. Вместо точек в нижеследующих предложениях поставить одно из выражений «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) Правильность многоугольника . . . . . ., для того чтобы около него можно было описать окружность. б) Равенство суммы противоположных углов четырехугольника 180° . . . . . ., для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность. в) Правильность многоугольника основания . . . ., для того чтобы пирамида была правильной. г) Правильность многоугольника основания и прохождение высоты через центр основания . . . . . ., для того чтобы пирамида была правильной. д) Для того чтобы $(a+b) \vdots c$ . . . ., чтобы $a \vdots c$ и $b \vdots c$ (знак $\vdots$ обозначает отношение «делится на»). е) Для того чтобы $ab \vdots c$ . . . ., чтобы $a \vdots c$ или $b \vdots c$. ж) Для того чтобы $ab \vdots c$ . . . ., чтобы $a \vdots c$. з) Для того чтобы $\angle\alpha = \angle\beta$ . . . . ., чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$. и) $a \parallel b$ и $b \parallel c$ . . . . ., для того чтобы $a \parallel c$. Записать высказывания д) — и) в виде формул на логико-математическом языке.

156. Каждый из нижеследующих признаков записать в виде эквиваленции и в виде конъюнкции двух импликаций, указав, какая из этих импликаций доказывает необходимость, какая — достаточность признака:

а) признаки подобия треугольников; б) признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6; в) признак параллельности двух плоскостей; г) признак перпендикулярности прямой и плоскости; д) признак перпендикулярности двух плоскостей; е) признак наличия вещественных решений квадратного уравнения.

§ 22. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

22.1. Доказательство. Слово «доказательство», как и слово «рассуждение», применяется в обыденной речи в весьма широком (и недостаточно уточненном, расплывчатом) смысле.

Говоря «математическое доказательство», мы имеем в виду доказательство математических предложений, или, точнее, доказательство предложений какой-нибудь математической теории.

Дальше будем пользоваться термином «доказательство» в смысле «математическое доказательство».

Из сказанного ясно, что о доказательстве имеет смысл говорить лишь в рамках какой-нибудь математической теории.

Мы различим *формальное и неформальное* (*содержательное*) *доказательства*, применяющиеся соответственно в формальных и содержательных математических теориях.

Так как обычно математические теории вообще строятся как содержательные теории (формальные теории строятся лишь для специальных целей, в частности для исследования самого построения математической теории и связанных с этим построением проблем), то обычные доказательства строятся как содержательные (неформальные) доказательства, в которых используются обычные рассуждения и правила логического вывода не фиксируются. Однако и эти, обычные, доказательства могут быть несколько уточнены на базе строгого понятия формального доказательства (или вывода).

22.2. Формальное и содержательное доказательства. Пусть некоторая формальная математическая теория построена на базе логики предикатов (пример такого построения кратко описан выше (21.3)).

Доказательство предложения этой теории понимается как вывод этого предложения из аксиом, рассматриваемых как посылки, и определяется следующим образом:

Доказательством предложения (теоремы) Т называется конечная последовательность предложений (данной теории) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) каждое предложение φ_i последовательности или аксиома, или получается из предшествующих предложений по какому-либо из правил вывода (логики предикатов), 2) последнее предложение последовательности φ_n есть Т.

Ввиду того что в соответствии с этим определением формальные доказательства являются очень длинными (состоят из большого числа предложений), их сокращают (уменьшают число составляющих доказательство предложений), допуская в качестве посылок наряду с аксиомами и ранее доказанные теоремы (рдт) и определения (о).

Приведем в качестве примера формальное доказательство теоремы о трех перпендикулярах (см. рис. 34)

$$AB \perp \alpha \wedge a \mathbin{\ast} \alpha \wedge a \perp BC \Longrightarrow a \perp AC.$$

Обозначим множество аксиом, ранее доказанных теорем и определений элементарной геометрии через Г.

Тогда нам необходимо построить вывод указанной теоремы из совокупности посылок Г, т. е.

$$\Gamma \vdash AB \perp \alpha \wedge a \mathbin{\ast} \alpha \wedge a \perp BC \Longrightarrow a \perp AC$$

или, используя ТД,

$$\Gamma,\ AB \perp \alpha \wedge a \nparallel \alpha \wedge a \perp BC \vdash a \perp AC.$$

Доказательство

1. $AB \perp \alpha \wedge a \nparallel \alpha \wedge a \perp BC$; 1. п;
2. $AB \perp \alpha \wedge a \nparallel \alpha$; 2. УК (1);
3. $AB \perp \alpha \wedge a \nparallel \alpha \Rightarrow a \perp AB$; 3. п (о);

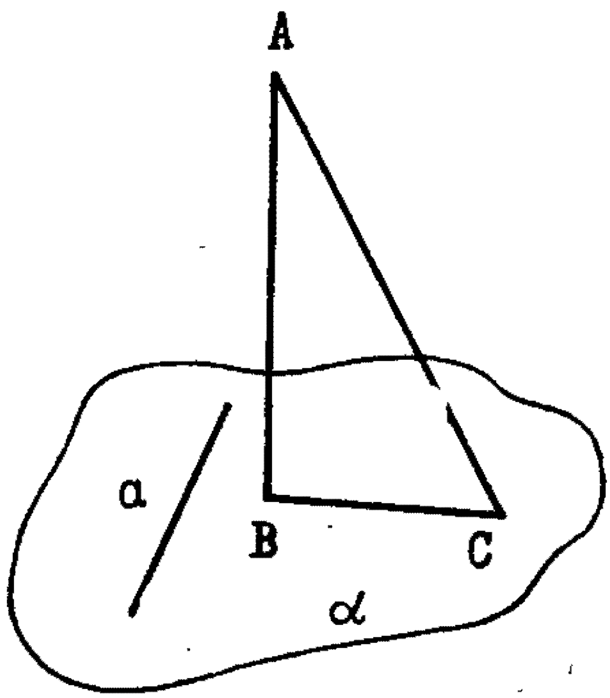


Рис. 34

4. $a \perp AB$; 4. ПЗ (3, 2);
5. $a \perp BC$; 5. УК (1);
6. $a \perp AB \wedge a \perp BC$; 6. ВК (4, 5);
7. $a \perp AB \wedge a \perp BC \Rightarrow a \perp ABC$; 7. п (рдт);
8. $a \perp ABC$; 8. ПЗ (7, 6);

9. $A \ast ABC$;	9. п (о);
10. $C \ast ABC$;	10. п (о);
11. $A \ast ABC \wedge C \ast ABC$;	11. ВК (9, 10);
12. $A \ast ABC \wedge C \ast ABC \Longrightarrow AC \ast ABC$;	12. п (аксиома);
13. $AC \ast ABC$;	13. ПЗ (12, 11);
14. $a \perp ABC \wedge AC \ast ABC$;	14. ВК (8, 13);
15. $a \perp ABC \wedge AC \ast ABC \Longrightarrow a \perp AC$;	15. п (о);
16. $a \perp AC$;	16. ПЗ (15, 14).

Отметим, что по существу, так как эта теорема представляет собой общее предложение, AB, α, a, AC должны рассматриваться как переменные и формула, выражающая эту теорему, должна начинаться с кванторов общности ($\forall AB, \alpha, a, AC$). Поэтому к доказательству добавятся еще две строки: сначала мы должны освободиться от кванторов, используя ВЛ, а в конце — ввести кванторы, используя ВКО.

Приведем теперь доказательство этой же теоремы в обычной, словесной (неформальной, содержательной) форме:

«Так как $AB \perp \alpha$ и $a \ast \alpha$, то $a \perp AB$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). Из того, что $a \perp AB$ и $a \perp BC$ (по условию) следует, что $a \perp ABC$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), так как AB и BC — пересекающиеся (имеют общую точку B). Из того, что $a \perp ABC$ и $AC \ast ABC$ (так как две точки AC лежат в плоскости ABC) следует, что $a \perp AC$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).»

Анализ этого «словесного доказательства» показывает, что оно состоит по существу из трех предложений, входящих в приведенное выше формальное доказательство этой же теоремы под номерами 3, 7 и 15.

Таким образом, обычное, содержательное, доказательство теоремы о трех перпендикулярах (если и в нем использовать логико-математический язык) запишется в трех строках:

1 (3). $AB \perp \alpha \wedge a \ast \alpha \Longrightarrow a \perp AB$ (по определению);

2 (7). $a \perp AB \wedge a \perp BC \Longrightarrow a \perp ABC$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости);

3 (15). $a \perp ABC \wedge AC \ast ABC \Longrightarrow a \perp AC$ (по определению).

(В скобках указаны номера предложений в формальном доказательстве.)

Сопоставление формального и содержательного доказательств одной и той же теоремы показывает, что последнее представляет собой определенным образом сокращенное формальное доказательство (не высказываются в явном виде все посылки, отдельные однотипные шаги объединяются, не фиксируются используемые правила вывода, некоторые шаги, как, например, удаление или введение конъюнкции, опускаются и т. п.).

С другой стороны, содержательное доказательство представляет собой обычное, заслуживающее доверия, рассуждение, указывающее лишь на существование формального доказательства и подсказывающее путь его построения.

22.3. Косвенное доказательство. В математике часто используются различные варианты косвенного доказательства (известного из школьного курса под не совсем удачным названием доказательства способом «от противного»).

Рассмотрим логические основы косвенного доказательства.

Косвенное доказательство некоторой теоремы T состоит в том, что исходят из отрицания T, называемого *допущением косвенного доказательства* (дкд), и выводят из него ложное заключение. Это выведение называется «приведением к нелепости», или «приведением к абсурду» (латинское название «*reductio ad absurdum*»). Наиболее распространенным случаем «приведения к абсурду» является выведение логического противоречия.

Противоречием в косвенном рассуждении может служить любая конъюнкция типа $r\bar{r}$ (тождественно-ложная).

Основная форма косвенного доказательства начинается с $\bar{\mathrm{T}}$ и оканчивается предложением типа $r\bar{r}$ (в частности, r может быть аксиомой или ранее доказанной теоремой, а рассуждение приводит к $\bar{r}$, и следовательно, к $r\bar{r}$ (ВК)).

В завершение такого доказательства обычно говорят: «полученное противоречие доказывает теорему».

Выясним точный смысл этих слов.

Пусть Г — множество посылок, включающее аксиомы, определения и ранее доказанные теоремы теории, на языке которой выражено и доказываемое предложение Т, а также все общезначимые формулы логики предикатов (если речь идет о формальной теории). Тогда косвенное доказательство представляет собой вывод Г, $\bar{\mathrm{T}} \vdash r\bar{r}$, где $r \in$ Г, или, используя ТД, Г $\vdash \bar{\mathrm{T}} \Rightarrow r\bar{r}$.

Так как $r\bar{r}$ тождественно-ложно, то $\overline{r\bar{r}}$ общезначимо, т. е. является посылкой ($\overline{r\bar{r}} \in$ Г), и после получения противоречия $\bar{r}r$ мы можем дополнить доказательство еще тремя строками, доведя его до вывода Т следующим образом:

1. $\bar{\mathrm{T}}$;	1. дкд;
. . . . . .	. . . . . .
n. $r\bar{r}$;	n. ВК (k, l);
$n+1$. $\bar{\mathrm{T}} \Rightarrow r\bar{r}$;	$n+1$. ТД (1, n);
$n+2$. $\overline{r\bar{r}}$;	$n+2$. п;
$n+3$. Т;	$n+3$. ПО ($n+1$, $n+2$).

Таким образом, точный смысл слов «полученное противоречие доказывает теорему» состоит в возможности достраивания доказательства после получения противоречия до вывода доказываемого предложения Т.

Так как в математике доказываемое предложение очень часто имеет вид импликации $p \Longrightarrow q$, то допущением косвенного доказательства в таком случае будет $\overline{p \Longrightarrow q}$, или равносильное предложение $p\bar{q}$.

Приведем пример. Допустим, что a, b, c — различные прямые на плоскости, и мы хотим доказать предложение

$$p \Longrightarrow q : a \parallel c \wedge b \parallel c \Longrightarrow a \parallel b. \quad (1)$$

Косвенное доказательство начинается с допущения:

$$p\bar{q} : a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge \overline{a \parallel b}. \quad (2)$$

Из этого допущения, применяя УК, получаем

$$p : a \parallel c \wedge b \parallel c \quad (3)$$

и

$$\bar{q} : \overline{a \parallel b}. \quad (4)$$

Из определения параллельных прямых получаем

$$\bar{q} \Longrightarrow r : \overline{a \parallel b} \Longrightarrow (\exists C)\,[C * a,\ b]. \quad (5)$$

Из (4) и (5) по ПЗ получаем

$$r : (\exists C)\,[C * a,\ b]. \quad (6)$$

Из (3) и (6) по ВК:

$$pr : a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge (\exists C)\,[C * a,\ b]. \quad (7)$$

Из аксиомы параллельных следует

$$\overline{pr} : \overline{a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge (\exists C)\,[C * a,\ b]}. \quad (8)$$

Наконец, из (7) и (8) по ВК получаем противоречие

$$pr\ \overline{pr},$$

которое и доказывает теорему*.

Часто при косвенном доказательстве предложения $p \Longrightarrow q$, исходя из $p\bar{q}$, выводят $\bar{p}$. Дальше можно различными способами вывести доказываемое предложение $p \Longrightarrow q$: во-первых, получением противоречия $p\bar{p}$, которое и «доказывает теорему» (в уточненном выше смысле этих слов). Во-вторых, выводом контрапозитивного предложения $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$.

В последнем случае после получения $\bar{p}$ доказательство завершается следующим образом:

1. $p\bar{q}$;	1. дкд;
2. $\bar{q}$;	2. УК (1);
. . . .	. . . .
n. $\bar{p}$;	n. . . .;
$n+1$. $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$;	$n+1$. ТД (2, n);
$n+2$. $p \Longrightarrow q$;	$n+2$. ПК ($n+1$).

Сравним два варианта косвенного доказательства теоремы $p \Longrightarrow q: \angle 1 = \angle 2 \Longrightarrow a \parallel b$ (рис. 35).

Первые шесть шагов являются общими для обоих вариантов:

1. $p\bar{q}: \angle 1 = \angle 2 \wedge \overline{a \parallel b}$;	1. дкд;
2. $\bar{q}: \overline{a \parallel b}$;	2. УК (1);

---

* Здесь приведено лишь описание косвенного доказательства, но не построено само это доказательство в виде формального вывода, содержащего большое число шагов.

3. $p: \angle 1 = \angle 2$;
4. $\overline{q} \Longrightarrow r: \overline{a \parallel b} \Longrightarrow (\exists C)\,[C * a,\ b]$;
5. $r: (\exists C)\,[C * a,\ b]$;
6. $\overline{p}: \angle 1 \neq \angle 2$;

3. УК (1);
4. п (о);
5. ПЗ (4, 2);
6. п (из 5 по рдт*).

Рассмотрим два различных продолжения этого доказательства:

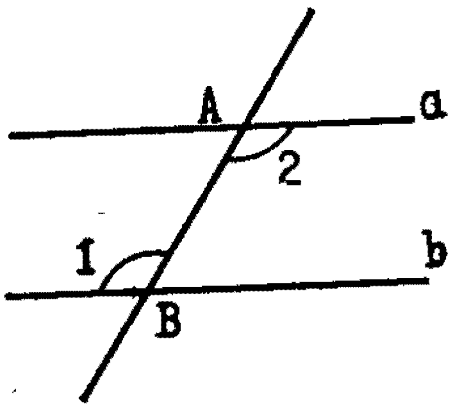


Рис. 35

а) Использование противоречия:

7. $p\overline{p}: \underline{\angle 1 = \angle 2 \wedge \angle 1 \neq \angle 2}$;
8. $\overline{p\overline{p}}: \angle 1 = \angle 2 \wedge \angle 1 \neq \angle 2$;
9. $p\overline{q} \Longrightarrow p\overline{p}: \angle 1 = \angle 2 \wedge \overline{a \parallel b} \Longrightarrow \angle 1 = \angle 2 \wedge \angle 1 \neq \angle 2$;

7. ВК (3. 6);
8. п (общезначимо);
9. ТД (1,7);

* Здесь используется теорема о внешнем угле (1 или 2) треугольника (ABC).

10. $\overline{p\bar{q}}: \angle 1 = \angle 2 \wedge \overline{a \parallel b}$; 10. ПО (9,8);

11. $p \Rightarrow q: \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \parallel b$; 11. (из 10 $\overline{p\bar{q}} \equiv p \Rightarrow q$).

б) Использование контрапозитивного предложения:

7′. $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}: \overline{a \parallel b} \Rightarrow \angle 1 \neq \angle 2$; 7′. ТД(2, 6);

8′. $p \Rightarrow q: \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \parallel b$; 8′. ПК(7′).

Как видно, *контрапозитивная* форма косвенного доказательства наиболее простая.

Имеется ряд специальных форм косвенного доказательства, одна из которых рассматривается ниже.

22. 4. **Доказательство методом исключения.** Эта специальная форма косвенного доказательства состоит в следующем.

Допустим, что нам нужно доказать предложение $p \Rightarrow q_1$, т. е. доказать, что $\Gamma \vdash p \Rightarrow q_1$, или, используя ТД, Γ, $p \vdash q_1$.

Наряду с заключением q_1 рассматриваются все остальные возможности $q_2, q_3, \ldots, q_n$, т. е. такие, что дизъюнкция $q_1 \vee q_2 \vee q_3 \vee \vee \ldots \vee q_n$ принадлежит к посылкам (т. е. является аксиомой, или определением, или ранее доказанной теоремой). Затем доказывают, что каждая из остальных возможностей $q_2, q_3, \ldots, q_n$ ведет к противоречию, и таким образом получают $\bar{q}_2, \bar{q}_3, \ldots, \bar{q}_n$, [а следовательно, конъюнкцию $\bar{q}_2 \bar{q}_3 \ldots \bar{q}_n$, или равносильное предложение $\overline{q_2 \vee q_3 \vee \ldots \vee q_n}$.

Из $q_1 \vee q_2 \vee q_3 \vee \ldots \vee q_n$ и $\overline{q_2 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n}$, применяя [УД, получаем q_1.

В качестве иллюстрации метода исключения опишем доказательство этим методом теоремы: «Если любая плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то эти прямые параллельны», т. е.

$$\Gamma \vdash p \Rightarrow q_1: \Gamma \vdash (\forall \alpha)[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b] \Rightarrow a \parallel b$$

или, используя ТД,

$$\Gamma,\ p \vdash q_1: \Gamma,\ (\forall \alpha)[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b] \vdash a \parallel b.$$

Исходим из формулы

$$q_1 \vee q_2 \vee q_3: a \parallel b \vee a \times b \vee a \chi b, \tag{1}$$

как принадлежащей Г (рдт) ($\times$ и χ обозначают соответственно отношения пересечения и скрещивания).

Допущение q_2:$a \times b$ приводит к

$$a \times b \Rightarrow (\exists\alpha)\,[\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$$

(достаточно провести произвольную плоскость α через b, отличную от плоскости, определяемой пересекающимися прямыми a, b) или так как $(\exists\alpha)\,[\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}] \equiv \overline{(\forall\alpha)\,[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b]}$,

$$q_2 \Rightarrow \bar{p}: a \times b \Rightarrow (\overline{\forall\alpha})[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b]. \tag{2}$$

Из $q_2 \Rightarrow \bar{p}$ и p по ПО получаем

$$\bar{q}_2: \overline{a \times b}. \tag{3}$$

Аналогично, допущение q_3:$a \chi b$ приводит к

$$q_3 \Rightarrow \bar{p}: a \chi b \Rightarrow \overline{(\forall\alpha)}\,[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b] \tag{4}$$

(достаточно через b и какую-нибудь точку прямой a провести плоскость α).

Из (4) и p по ПО получаем

$$\bar{q}_3: \overline{a \chi b}. \tag{5}$$

Из (3) и (5) по ВК получаем

$$\bar{q}_2\ \bar{q}_3:\ \overline{a \times b} \wedge \overline{a \chi b},$$

или равносильное предложение

$$\overline{q_2 \vee q_3}:\ \overline{a \times b \vee a \chi b}. \tag{6}$$

Из (1) и (6) по УД получаем

$$q_1: a \parallel b.$$

Если заменить доказываемое предложение равносильным ему контрапозитивным предложением, то может быть построено доказательство «по случаям».

Вместо теоремы $(\forall\alpha)\,[\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b] \Rightarrow a \parallel b$ доказываем контрапозитивную $\overline{a \parallel b} \Rightarrow (\exists\alpha)\,[\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$.

Используя ТД, нам достаточно доказать, что

$$\Gamma,\ \bar{q}_1 \vdash \bar{p}: \Gamma,\ \overline{a \parallel b} \vdash (\exists\alpha)\,[\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]:$$

1. $q_1 \vee q_2 \vee q_3 : a \parallel b \vee a \times b \vee a \chi b$;	1. п (рдт);
2. $\overline{q_1} : \overline{a \parallel b}$;	2. п;
3. $q_2 \vee q_3 : a \times b \vee a \chi b$;	3. УД (1, 2);
4. $q_2 \Rightarrow \overline{p} : a \times b \Rightarrow (\exists \alpha)\, [\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$;	4. п (рдт);
5. $q_3 \Rightarrow \overline{p} :\ a \chi b \Rightarrow (\mathrm{E} \alpha)\, [\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$;	5. п (рдт),
6. $q_2 \vee q_3 \Rightarrow \overline{p} : a \times b \vee a \chi b \Rightarrow (\exists \alpha)\, [\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$;	6. ДО (4,5);*
7. $\overline{p} : (\exists \alpha)\, [\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}]$;	7. ПЗ (6, 3).

22. 5. Доказательство методом математической индукции. Метод математической индукции — специальный метод доказательства, применяющийся к предложениям типа

$$(\forall n \in N) P(n), \tag{1}$$

т.е. к предложениям, выражающим некоторое свойство P, присущее любому натуральному числу n.

Ввиду того, что непосредственная проверка наличия этого свойства у любого натурального числа невозможна из-за бесконечности множества N, поступают так: устанавливают наличие этого свойства для $n = 1$ и доказывают, что из допущения о наличии его для $n = k$, где k — произвольное натуральное число, следует наличие этого свойства и для $n = k + 1$, т. е. для числа, «непосредственно следующего за k». После этого заключают об истинности предложения (1), т. е. о том, что свойством P обладает любое натуральное число.

Выясним логическую структуру доказательства методом математической индукции.

---

* Переход 5—6 требует применения правила вывода $\dfrac{\varphi_1 \Rightarrow \psi,\ \varphi_2 \Rightarrow \psi}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi}$, которое мы назвали ДО — *дизъюнкция оснований*; законность этой схемы вывода обосновывается тем, что $\vdash (\varphi_1 \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi)$.

Формальной основой этого метода служит одна из аксиом, характеризующих структуру, наделяемую множество N отношением «непосредственно следует за».

В множестве N выделяется элемент, называемый *единицей* и обозначаемый 1, и вводится двуместный предикат «y непосредственно следует за x», который мы обозначим $y = x'$.

Структура $[N']$ характеризуется следующими аксиомами (в записи аксиом буквы x, y используются в качестве переменных для элементов из N):

а. 1. $(\forall x)\,[\overline{1 = x'}]$

(1 непосредственно не следует ни за каким натуральным числом);

а. 2. $(\forall x)\,(\exists y)\,[y = x']$

(для всякого натурального числа существует непосредственно следующее за ним натуральное число);

а. 3. $(\forall x)\,(\forall y)\,[x = y \Longrightarrow x' = y']$

(для всякого натурального числа не существует более одного непосредственно следующего за ним натурального числа);

а. 4. $(\forall x)\,(\forall y)\,[x' = y' \Longrightarrow x = y]$

(всякое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом);

а. 5. $P(1) \wedge (\forall x)\,[P(x) \Longrightarrow P(x')] \Longrightarrow (\forall y)\;P(y)$

(если 1 обладает некоторым свойством P и для всякого натурального числа из того, что оно обладает этим свойством, следует, что и непосредственно следующее за ним натуральное число обладает им, то всякое натуральное число обладает свойством P). *

---

* Система аксиом а.1 — а.5 была предложена итальянским математиком и логиком Дж. Пеано в 1891 г.

Аксиомы а. 1 — а.5 характеризуют множество N натуральных чисел только с точки зрения отношения непосредственного следования. На базе этого отношения могут быть введены операции сложения и умножения с помощью специальных аксиом, одна из которых устанавливает, что $x' = x + 1$.

Аксиома а.5, называемая *аксиомой математической индукции*, выделяется среди аксиом а.1 — а.5 своей сложной логической структурой и тем, что в ее записи содержится предикатная переменная P. Формула (а.5) представляет собой высказывательную форму (выражает логическую функцию), обращающуюся при подстановке вместо P любого его значения (названия конкретного свойства) в истинное высказывание (поскольку принимается за аксиому). Поэтому по существу а.5 представляет собой *схему аксиом*, из которой при различных значениях предикатной переменной P получаются конкретные аксиомы.

Схема а.5 нам подсказывает метод доказательства предложений, выражающих свойства натуральных чисел: если нам нужно доказать предложение $(\forall y) P^\circ(y)$, где y — переменная для натуральных чисел («всякое натуральное число обладает свойством P°»), достаточно установить истинность высказывания $P^\circ(1)$ («1 обладает свойством P°») и доказать, что $(\forall x)[P^\circ(x) \Longrightarrow P^\circ(x')]$, т. е. для всякого x, если x обладает свойством P°, то этим свойством обладает и число x', непосредственно следующее за x.

Получается следующая схема доказательства *методом математической индукции:*

1. $P^\circ(1)$;	1. устанавливается проверкой;
2. $(\forall x)[P^\circ(x) \Longrightarrow P^\circ(x')]$;	2. доказывается;
3. $P^\circ(1) \wedge (\forall x)[P^\circ(x) \Longrightarrow P^\circ(x')] \Longrightarrow (\forall y)[P^\circ(y)]$;	3. из а.5 подстановкой P° вместо P;

4. $P^\circ(1) \wedge (\forall x)[P^\circ(x) \Longrightarrow \Longrightarrow P^\circ(x')]$; 4. ВК(1, 2);

5. $(\forall y) P^\circ(y)$; 5. ПЗ(3, 4).

Проиллюстрируем метод математической индукции на простом («школьном») примере:

$$(\forall x) P^\circ(x) : (\forall x)\left[1+2+3+\ldots+x=\frac{x(x+1)}{2}\right].$$

Таким образом,

$$P^\circ(x): 1+2+3+\ldots+x=\frac{x(x+1)}{2}. \qquad (1)$$

Подставив 1 вместо x в (1), получаем $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, т. е. $P^\circ(1)$ — истинное высказывание. Пусть теперь (1) верно для произвольного, но фиксированного x. Докажем, что оно верно и для x', т. е. что

$$1+2+3+\ldots+x'=\frac{x'(x'+1)}{2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+x+x' &= (1+2+3+\ldots+x)+x';\\
&=\frac{x(x+1)}{2}+x';\\
&=\frac{xx'+2x'}{2};\\
&=\frac{x'(x+2)}{2};\\
&=\frac{x'((x+1)+1)}{2};\\
&=\frac{x'(x'+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали истинность импликации $P^\circ(x) \Longrightarrow P^\circ(x')$ для всякого x, т. е. $(\forall x)[P^\circ(x) \Longrightarrow P^\circ(x')]$.

Дальше, следуя приведенной выше схеме (обычно применяемой в неявном виде), получаем $(\forall y) P^\circ(y)$, или, переименовав переменную, $(\forall x) P^\circ(x)$.

Упражнения

157. Исходя из известного содержательного доказательства, построить формальное доказательство теоремы:

а) Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам. б) Средняя арифметическая двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического. в) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой же плоскости. г) Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая плоскость перпендикулярна этой прямой.

158. Провести логический анализ косвенного доказательства (подобно проведенному выше (22.3 — 22.4)) теоремы:

а) Обратной теореме Пифагора. б) Если прямая вне плоскости параллельна какой-нибудь прямой на плоскости, то она параллельна и плоскости. в) Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. г) Если две плоскости параллельны, то они пересекаются любой третьей плоскостью (непараллельной им) по параллельным прямым. д) Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то эти плоскости параллельны.

159. Провести логический анализ (показать осуществление схемы) доказательства методом математической индукции следующих предложений:

а) $(\forall x \in \mathbf{N})\left[1+3+5+\ldots+(2x-1)=x^2\right]$; б) $(\forall x \in \mathbf{N})\left[1^2+2^2+\ldots+x^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}\right]$; в) $(\forall x \in \mathbf{N})\left[x \geqslant 2 \Rightarrow 2^x > x\right]$.

§ 23. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ПОРЯДОК

Особую роль в математике играют бинарные отношения двух типов: отношения эквивалентности и отношения порядка.

23.1. Отношение эквивалентности. Рассмотренное нами (гл. 3, 17.3) отношение равенства, понимаемое в смысле совпадения, обладает свойствами:

а) рефлексивности

$$(\forall x)\,[x = x];$$

б) симметричности

$$(\forall x)\,(\forall y)\,[x = y \Longrightarrow y = x];$$

в) транзитивности

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z].$$

В математике встречается много примеров бинарных отношений такого типа, т. е. обладающих такими же свойствами.

Например, отношение подобия геометрических фигур тоже является рефлексивным: $(\forall F)\,[F \backsim F]$, симметричным: $(\forall F_1)\,(\forall F_2)\,[F_1 \backsim F_2 \Longrightarrow F_2 \backsim F_1]$ и транзитивным: $(\forall F_1)\,(\forall F_2)\,(\forall F_3)\,[F_1 \backsim F_2 \wedge F_2 \backsim F_3 \Longrightarrow F_1 \backsim F_3]$.

Другим примером рефлексивного, симметричного и транзитивного отношения является отношение «x сравнимо с y по модулю m», определенное на множестве C^2 всевозможных пар целых чисел следующим образом: «x сравнимо с y по модулю m, если и только если при делении на m ($m \in \mathbf{N}$) числа x и y дают один и тот же остаток». Это отношение обозначается символом $x \equiv y \pmod{m}$ или, кратко, $x \equiv y$, если всюду в записях имеется в виду один и тот же модуль m.

Из определения этого отношения непосредственно следует его рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Эти и другие, подобные им (обладающие такими же свойствами), бинарные отношения являются примерами отношения *эквивалентности*, которое определяется этими свойствами.

Определение. *Всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, определенное на множестве M^2 всевозможных пар элементов некоторого множества M, называется отношением эквивалентности.*

Необходимо отметить, что элементы множества M, находящиеся в отношении эквивалентности, вообще не совпадают всеми своими свойствами (совпадение является частным случаем эквивалентности).

Например, в подобных фигурах совпадает лишь форма (величины углов, отношения сторон), но различны их размеры. Сравнимые по модулю m числа вообще различны, совпадают лишь их остатки от деления на m. Отношение равносильности уравнений (или неравенств) тоже является отношением типа эквивалентности. Но равносильные уравнения (или неравенства), например, уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{1}$$

и

$$(x-1)(x-2) = 0, \tag{2}$$

рассматриваемые на множестве D, не совпадают, они имеют различную структуру, совпадают лишь их множества решений (области истинности определяемых уравнениями (1) и (2) предикатов):

$$\underset{x}{M}[x^2 - 3x + 2 = 0] = \underset{x}{M}[(x-1)(x-2) = 0] = \{1,\ 2\}.$$

Всякое отношение типа эквивалентности, определенное на M^2, разбивает множество M на классы, называемые *классами эквивалентности*.

Рассмотрим пример. Пусть отношение «x сравнимо с y по модулю 3» — $x \equiv y \pmod 3$ — определено на множестве N_0^2 всевозможных пар целых неотрицательных чисел, т. е. $(x,\ y) \in N_0^2$.

Если взять любое число из N_0 и разделить на 3, получим в качестве остатка какое-нибудь число из множества $B_3 = \{0, 1, 2,\}$.

Каждому элементу $r \in B_3$ соответствует класс чисел из N_0, дающих при делении на 3 остаток r. Рассматриваемое отношение разбивает множество N_0 на 3 класса:

1. $\{x_0\}$ — класс чисел, дающих при делении на 3 остаток 0, или кратных 3. Очевидно, что переменную x_0 для таких чисел можно представить в виде $3k$, где $k \in N_0$, т. е. $\{x_0\} = \{3k\}$.

2. $\{x_1\}$ — класс чисел, дающих при делении на 3 остаток 1. Очевидно, что этот класс можно представить так: $\{x_1\} = \{3k + 1\}$.

3. $\{x_2\}$ — класс чисел, дающих при делении на 3 остаток 2. Очевидно, что этот класс можно представить так: $\{x_2\} = \{3k + 2\}$.

Действительно,

$$\{3k\} \cup \{3k + 1\} \cup \{3k + 2\} = N_0$$

и

$$\{3k + i\} \cap \{3k + j\} = \varnothing,$$

где $i, j \in B_3$ и $i \neq j$.

Нетрудно заметить, что это разбиение множества N_0 на классы характеризуется следующими двумя свойствами: а) всякие два числа, принадлежащие одному классу, сравнимы по модулю 3 и б) всякие два числа, принадлежащие различным классам, несравнимы по этому модулю.

Разбиение множества на классы эквивалентности часто используется в математике для образования новых понятий.

Приведем пример.

Построение теории рациональных чисел, известное под названием «теории пар», основано на разбиении множества $C \times (C \setminus \{0\})$ на классы эквивалентности.

В множестве $C \times (C \setminus \{0\})$, т. е. между парами (x, y), где $x \in C$ и $y \in C \setminus \{0\}$, вводится отношение R следующим образом:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \underset{Df}{\equiv} x_1y_2 = y_1x_2.$$

Легко устанавливается, что R — отношение эквивалентности.

Действительно, это отношение:

а) рефлексивно, т. е. $(\forall(x, y))[(x, y) R(x, y)]$, так как $xy = yx$;

б) симметрично, т. е. $(\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2))[(x_1,y_1)R(x_2, y_2) \Longrightarrow (x_2, y_2)R(x_1, y_1)$, так как $x_1y_2 = y_1x_2 \Longrightarrow x_2y_1 = x_1y_2$;

в) транзитивно, т. е. $(\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))[(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2)R(x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1)R(x_3, y_3)]$, так как $x_1y_2 = y_1x_2 \wedge x_2y_3 = y_2x_3 \Longrightarrow x_1y_3 = y_1x_3$.

Таким образом, отношение R разбивает множество $Cx(C \setminus \{0\})$ на классы эквивалентности. Каждый из этих классов называется *рациональным числом*.

Например, пары $(1, 2), (2, 4), (3, 6), \ldots$ принадлежат одному классу, одному рациональному числу $\alpha = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \ldots\}$ (все эти пары эквивалентны в указанном выше смысле).

Обычно эти пары записывают так: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ и называют *дробями*, эквивалентность пар называют *равенством дробей*, а класс эквивалентности для упрощения заменяют каким-нибудь элементом («представителем») этого класса, чаще всего наиболее простым (несократимой дробью), называя его рациональным числом.

Такое упрощение допустимо, так как рациональное число, как класс эквивалентности, однозначно определяется любым элементом этого класса, а операции над рациональными числами, как над классами пар, определяются через операции над «представителями» этих классов так, что результаты этих операций не зависят от выбора представителей.

23.2. Отношение порядка. Рассмотренное нами (гл. 3, 15.2) отношение $x < y$ является:

а) антирефлексивным, т. е. $(\forall x)\,[\overline{x < x}]$;

б) антисимметричным, т. е. $(\forall x)(\forall y)\,[x < y \Rightarrow \overline{y < x}]$;

в) транзитивным, т. е. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,[x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$.

Этими же свойствами обладает и отношение строгого включения между множествами:

а) $(\forall X)\,\overline{[X \subset X]}$;

б) $(\forall X)(\forall Y)\,[X \subset Y \Rightarrow \overline{Y \subset X}]$;

в) $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)\,[X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z]$.

Эти и подобные им (обладающие такими же свойствами) отношения являются примерами *отношения порядка.*

Общее отношение порядка (в указанном смысле называемое также отношением *строгого* порядка) «x предшествует y» можно определить следующим образом.

Определение. *Всякое антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение, определенное на множестве M^2 всевозможных пар элементов некоторого множества M, называется отношением порядка (или строгого порядка).*

Если отношение порядка «x предшествует y» обозначить xPy, то характеризующие его свойства запишутся так:

$$(\forall x)\,\overline{[xPx]};\ \text{(а)}$$
$$(\forall x)\,(\forall y)\,[xPy \Longrightarrow \overline{yPx}];\ \text{(б)}$$
$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[xPy \wedge yPz \Longrightarrow xPz].\ \text{(в)}$$

Мы говорим, что некоторое множество M *упорядочено* отношением P, если, кроме (а) — (в), в нем истинно и высказывание

$$(\forall x)\,(\forall y)\,[\overline{x = y} \Longrightarrow xPy \vee yPx].\ \text{(г)}$$

Отношение порядка в широком (нестрогом) смысле не исключает равенства. Примерами такого отношения являются $x \leqslant y$, $x \geqslant y$, $X \subseteq Y$.

Отношение порядка в широком смысле в отличие от отношения строгого порядка является рефлексивным. Например, отношение $x \leqslant y$ характеризуется следующими свойствами:

$$(\forall x)\,[x \leqslant x];\ \text{(а}'\text{)}$$
$$(\forall x)\,(\forall y)\,[x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Longrightarrow x = y];\ \text{(б}'\text{)}$$
$$(\forall x)(\forall y)\,(\forall z)\,[x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z].\ \text{(в}'\text{)}$$

Обратим внимание на различные выражения свойства антисимметричности (б) и (б′).

Но $(\forall x)\,(\forall y)\,[x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Longrightarrow x = y] \equiv (\forall x)\,(\forall y)\,[\overline{x = y} \wedge x \leqslant y \Longrightarrow \overline{y \leqslant x}]$ (по закону расширенной контрапозиции), следовательно, формула (б′) отличается от (б) тем, что в посылку импликации включается условие различия элементов. Это необходимо потому, что к рефлексивному отношению формула (б) неприменима в случае, когда x и y обозначают имена одного элемента. Действительно, если в $x \leqslant y \Longrightarrow \overline{y \leqslant x}$ вместо x и y подставить a, получим $a \leqslant a \Longrightarrow \overline{a \leqslant a}$, что равносильно $\overline{a \leqslant a}$, а это противоречит свойству рефлексивности $(\forall x)[x \leqslant x]$.

Отношение порядка, как впрочем и другие отношения, не может рассматриваться в отрыве от множества, между элементами которого оно установлено.

Известные из школьного курса числовые множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{D}$ упорядочены отношением «меньше» (или «больше»). Однако *структуры порядка*

$$[\boldsymbol{N}, <], \ [\boldsymbol{C}, <], \ [\boldsymbol{R}, <], \ [\boldsymbol{D}, <],$$

определяемые отношением «меньше» в этих множествах, различны, хотя, разумеется, обладают общими свойствами (а) — (г).

Приведем два примера различий между этими структурами.

1) Высказывание $(\exists x)(\forall y)[x \leqslant y]$, выражающее существование наименьшего элемента множества, истинно в множестве $\boldsymbol{N}$ и ложно в каждом из множеств $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{D}$, так как у них нет наименьшего элемента. Это свойство (отсутствие наименьшего элемента) выражается отрицанием высказывания $(\exists x)(\forall y)[x \leqslant y]$, т. е. высказыванием

$$(\forall x)(\exists y)[x > y].$$

2) Свойство, выраженное аксиомой а.2, $(\forall x)(\exists y)[y = x']$ (22.5), называется *дискретностью* множества $\boldsymbol{N}$. Его можно выразить и через отношение «меньше».

Если за первичное принять отношение «меньше», то отношение «непосредственно следует за» определяется так:

$$y = x' \underset{Df}{\equiv} x < y \wedge \overline{(\exists z)}[x < z \wedge z < y] \equiv x < y \wedge (\forall z)[z \leqslant x \vee y \leqslant z].$$

Таким образом, свойство дискретности может быть записано следующим образом:

$$(\forall x)(\exists y)[x < y \wedge (\forall z)[z \leqslant x \wedge y \leqslant z]. \qquad (1)$$

Свойством дискретности обладает и множество $\boldsymbol{C}$. В множествах $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{D}$ высказывание (1) ложно. В этих множествах ложно и высказывание

$$(\exists x)(\exists y)[x < y \wedge (\forall z)(z \leqslant x \vee y \leqslant z)], \qquad (2)$$

следующее из (1) и выражающее более «слабое» свойство.

В множествах $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{D}$ истинно отрицание высказывания (2):

$$(\overline{\exists x})(\exists y)[x < y \wedge (\forall z)(z \leqslant x \vee y \leqslant z)],$$

или

$$(\forall x)(\forall y)[\overline{x < y} \vee (\overline{\forall z})(z \leqslant x \vee y \leqslant z)],$$

или

$$(\forall x)(\forall y)[x < y \Longrightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y)],$$

или, используя сокращенную запись $x < z < y$ конъюнкции $x < z \wedge z < y$,

$$(\forall x)(\forall y)[x < y \Longrightarrow (\exists z)(x < z < y)]. \qquad (3)$$

Высказывание (3) выражает свойство *плотности* множеств $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{D}$, состоящее в том, что «между» любыми двумя различными числами содержится число (число z содержится «между» числами x и y, если $x < z < y$ или $y < z < x$).

(Различие между структурами $[\boldsymbol{R}, <]$ и $[\boldsymbol{D}, <]$ мы здесь не рассматриваем.)

Упражнение

160. Какие из ниже приведенных бинарных отношений являются: 1) рефлексивными; 2) симметричными; 3) транзитивными?

а) Отношение параллельности прямых; б) отношение перпендикулярности прямых; в) отношение пересечения прямых; г) отношение делимости целых чисел; д) отношение взаимной простоты натуральных чисел; е) отношение следования предложений; ж) отношение равносильности предикатов; з) отношение между точками плоскости «лежать по одну сторону от данной прямой плоскости». Какие из перечисленных бинарных отношений являются эквивалентностями? отношениями порядка?

§ 24. ИЗОМОРФИЗМ

Возможность описания различных предметных областей с помощью одной и той же математической теории, а также применения аппарата одной математической теории к другой, объясняется наличием внутреннего, глубокого сходства между некоторыми множествами предметов различной природы при полном отсутствии «внешнего сходства» между этими множествами. Это — структурное сходство, получившее точное математическое описание с помощью понятия *изоморфизма* (дословно — одинаковая структура, форма), играющего фундаментальную роль в современной математике.

Мы рассмотрим несколько конкретных примеров, затем дадим общее определение понятия изоморфизма.

24.1. Примеры изоморфизма. 1. Элементы множества D вещественных чисел и множества T точек прямой различной природы, первые — числа, вторые — точки. В множестве D введено отношение порядка «$<$» («меньше»), а в множестве T — отношение порядка «$\prec$» («предшествует»). Эти отношения (первое — между числами, второе — между точками) имеют, разумеется, различный смысл. Однако эти отношения определяют в множествах D и T однородные структуры: $[D, <]$ и $[T, \prec]$. Это обнаруживается следующим образом.

Введением координатной системы на прямой определяется отображение $D \xrightarrow{f} T$, обладающее следующими двумя свойствами:

1) оно биективно (взаимно однозначное соответствие); следовательно, существует обратное отображение $T \xrightarrow{f^{-1}} D$;

2) $(\forall x, y \in \boldsymbol{D})[x < y \Longleftrightarrow f(x) \prec f(y)]$ или $(\forall x, y \in \boldsymbol{T})[x \prec y \Longleftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)]$.

Отображение f (или f^{-1}) называется *изоморфизмом*, сохраняющим отношение порядка, или переводящим отношение «меньше» в отношение «предшествует» (или «предшествует» — в «меньше»), а множества $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{T}$, между которыми установлен изоморфизм, называются *изоморфными* (относительно порядка).

Ввиду того что изоморфизм — взаимно однозначное соответствие, направление отображения ($\boldsymbol{D} \xrightarrow{f} \boldsymbol{T}$ или $\boldsymbol{T} \xrightarrow{f^{-1}} \boldsymbol{D}$) уже не существенно. Поэтому и говорят, что изоморфизм установлен **между** множествами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{T}$.

Для наглядности обозначим этот изоморфизм следующим образом:

$$[\boldsymbol{D}, <] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [\boldsymbol{T}, \prec].$$

В силу этого изоморфизма все предложения, выражающие свойства одной из структур $[\boldsymbol{D}, <]$ или $[\boldsymbol{T}, \prec]$, будучи переведенными на соответствующий язык, выражают и свойства другой.

Например, предложение $(\forall x, y \in \boldsymbol{D})[x < y \Longrightarrow (\exists z)(x < z < y)]$ выражает свойство плотности множества $\boldsymbol{D}$. Если заменить в нем $\boldsymbol{D}$ через $\boldsymbol{T}$, а $<$ через $\prec$, получим предложение

$$(\forall x, y \in \boldsymbol{T})[x \prec y \Longrightarrow (\exists z)(x \prec z \prec y)],$$

выражающее свойство плотности для $[\boldsymbol{T}, \prec]$.

Как видно, $[\boldsymbol{D}, <]$ и $[\boldsymbol{T}, \prec]$ по существу описываются одним и тем же множеством предложений (с точностью до названий элементов и отношений), т. е. одной математической теорией. Поэтому как математические объекты они неразличимы (в теории, использующей лишь отношение порядка).

2. Мы рассмотрели пример изоморфизма, сохраняющего отношение порядка. Понятие изоморфизма распространяется и на случаи, когда в множествах определены операции.

Рассмотрим отображение $N \xrightarrow{f} E$, где E — множество положительных четных чисел, определенное следующим образом:

$$f: x \to 2x, \ x \in \boldsymbol{N}.$$

Функция f — изоморфизм относительно «$<$», так как:

1) f — биективное отображение;

2) $(\forall x, y \in N)[x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)]$, так как $x < y \Longleftrightarrow 2x < 2y$.

Но f обладает еще одним свойством.

3) $(\forall x,\ y \in N)\,[f(x+y) = f(x) + f(y)]$, так как $2(x+y) = 2x + 2y$.

В таком случае говорят, что f (или f^{-1}) — изоморфизм, сохраняющий отношение порядка «$<$» и операцию сложения «$+$».

Для наглядности мы запишем этот изоморфизм так:

$$[N,\ <,\ +] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [E,\ <,\ +].$$

3. Рассмотрим множество D с отношением порядка «$<$» и операцией «$+$»: $[D,\ <,\ +]$ и множество D^+ положительных вещественных чисел с тем же отношением порядка и операцией «$\cdot$» (умножения): $D^+,\ <,\ \cdot]$. Определим отображение $D^+ \xrightarrow{f} D$ следующим образом:

$$f: x \to \log_a x,\ x \in D^+\ (a > 1).$$

Эта функция — изоморфизм, сохраняющий отношение «$<$» и переводящий операцию «$\cdot$» в операцию «$+$» (f^{-1} переводит «$+$» в «$\cdot$»):

1) f — биективное отображение;

2) $(\forall x,\ y \in D^+)\,[x < y \iff \log_a x < \log_a y]$;

3) $(\forall x,\ y \in D^+)\,[\log_a xy = \log_a x + \log_a y]$

(или $(\forall x,\ y \in D)\,[a^{x+y} = a^x a^y]$).

Этот изоморфизм обозначим

$$[D^+,\ <,\ \cdot] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [D,\ <,\ +].$$

При $a < 1$ получаем

$$[D^+,\ <,\ \cdot] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [D,\ >,\ +].$$

24.2. Общее определение изоморфизма. Обобщим теперь то понятие изоморфизма, которое мы разъяснили выше на нескольких примерах.

В каждом примере изоморфизма участвуют два множества с одинаковым числом введенных в них отношений и операций. Отношения и операции можно представить в виде предикатов. Так, бинарная операция в некотором множестве M представляет собой отображение $M^2 \to M$ или же трехместный предикат $M^3 \to \{И, Л\}$.

Например, операцию сложения в $\boldsymbol{D}$ можно представить как $\boldsymbol{D}^2 \to \boldsymbol{D}$: $(x, y) \to x+y$, $(x, y) \in \boldsymbol{D}^2$, $x+y \in \boldsymbol{D}$, или же как трехместный предикат

$$\boldsymbol{D}^3 \to \{И, Л\} : (x, y, z) \to S(x, y, z), \ (x, y, z) \in \boldsymbol{D}^3,$$
$$S(x, y, z) \in \{И, Л\},$$

где $S(x, y, z)$ обозначает $x+y=z$.

В самом общем виде имеем множество A с предикатами $P_1^{(m_1)}, \ldots, P_n^{(m_n)}$ и множество B с таким же числом n предикатов $R_1^{(m_1)}, \ldots, R_n^{(m_n)}$, причем каждому m_k-местному предикату $P_k^{(m_k)}$ соответствует точно один тоже m_k — местный предикат $R_k^{(m_k)}$:

$$[A, P_1^{(m_1)}, \ldots, P_n^{(m_n)}] \text{ и } [B, R_1^{(m_1)}, \ldots, R_n^{(m_n)}].$$

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *изоморфизмом* относительно предикатов $P_1^{(m_1)}, \ldots, P_n^{(m_n)}$ (или $R_1^{(m_1)}, \ldots, R_n^{(m_n)}$), если:

1) f — биективное отображение (взаимно однозначное соответствие),

2) для всех $k = 1, 2, \ldots, n$

$$(\forall x_1, \ldots, x_{m_k} \in A)\, [P_k^{(m_k)}(x_1, \ldots, x_{m_k}) \iff R_k^{(m_k)}(f(x_1), \ldots, f(x_{m_k}))]$$

или

$$(\forall x_1, \ldots, x_{m_k} \in B)\, [R_k^{(m_k)}(x_1, \ldots, x_{m_k}) \iff P_k^{(m_k)}(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{m_k}))].$$

Для наглядности этот изоморфизм можно обозначить так:

$$[A, P_1^{(m_1)}, \ldots, P_n^{(m_n)}] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [B, R_1^{(m_1)}, \ldots, R_n^{(m_n)}].$$

Нетрудно заметить, что это общее определение изоморфизма охватывает любые конкретные случаи, в том числе и рассмотренные выше (первый пример (24.1) может быть записан так: $[\boldsymbol{D},\ P_1^{(2)}] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{T},\quad P_1^{(2)}]$, второй (24.2) — $[\boldsymbol{N},\quad P_1^{(2)},\ P_2^{(3)}] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [E,\ P_1^{(2)},\ P_2^{(3)}]$ третий (24.3) — $[\boldsymbol{D}^+,\ P_1^{(2)},\ P_2^{(3)}] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [\boldsymbol{D},\ P_1^{(2)},\ R_2^{(3)}]$).

ОТВЕТЫ

Глава 1. Множества

20. $E_1 \cup E_2 = C$; $E_1 \cap E_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. **21.** а) $O_1 \cup O_2 =]-\infty, 5]$; $O_1 \cap O_2 = [-3, 2]$. **22.** $\underset{x}{M}[\,|x|<1] = \underset{x}{M}[x>-1] \cap \underset{x}{M}[x<1]$; $\underset{x}{M}[\,|x|>1] = \underset{x}{M}[x<-1] \cup \underset{x}{M}[x>1]$. **23.** а) $[-1, 3]$; в) $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$. **31.** $O_1 \cup O_2 = [2, 4]$; $O_1 \cap O_2 = \{3\}$. **37.** а) $[2, +\infty[$; д) $]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$. **40.** а) Множество неотличников; в) множество студентов, являющихся неотличниками **или** неспортсменами; г) множество студентов, являющихся неотличниками **и** неспортсменами; д) множество студентов, являющихся отличниками **или** спортсменами. **45.** 59; 2; 23; 39; 20. **47.** а) 19; б) 1. **48.** а) 1; б) 4; в) 50; г) 34. **57.** $A = B$.

66.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	b	a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
b	a	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
b	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

68. а), в), г), е) — биективные отображения; б), д) не являются биективными.

69. а) $f_1^{-1}: y \to x = \dfrac{y+5}{3}$, $y \in D$; б) $f_2^{-1}: y \to x = \log_2 y$, $y \in D^+$.

70.

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{bmatrix};\ f_2 = \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{bmatrix};\ f_3 = \begin{bmatrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{bmatrix};\ f_4 = \begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{bmatrix};$$

$$f_5 = \begin{bmatrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{bmatrix};\ f_6 = \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{bmatrix}$$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Глава 2. Высказывания

74. а) **Если** p **или** q, **то** r; д) p **или** q. **77.** д) Это число делится на 3, если и только если оно не простое; ж) если это число целое и делится на 3, то оно не простое; к) это число целое, положительное и простое или делится на 3. **78.** а) $p(q \vee \bar{r}) \Longrightarrow s$; б) $p \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow r)$; в) $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Longrightarrow q$. **82.** а) $(p \Longrightarrow q)\bar{r} \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow q \vee r \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$. **83.** 1) $p =$ Л (q и r — любые); 2) $p = q =$ И, $r =$ Л; $p =$ И, $q = r =$ Л.

86. д) е)

p	q	r	$q \vee r$	$q \Rightarrow q \vee r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И	И

91. а) $p \vee q \vee r$; б) p; в) p; г) $\bar{p} \vee \bar{q}$; д) $p \vee q$. 92. $(\bar{\ }, \wedge)$; $(\bar{\ }, \vee)$; $(\bar{\ }, \Rightarrow)$. 93. $\overline{p \Rightarrow qr \vee s} \equiv p\,(\bar{q} \vee \bar{r})\,\bar{s}$. 94. а) $p\bar{q}$; в) $(\bar{p} \vee \bar{q})\,r$. 97. $pq \Rightarrow r \equiv p\bar{r} \Rightarrow \bar{q}$; $p\,(q \vee r) \Rightarrow s \equiv p\bar{s} \Rightarrow \bar{q}\bar{r}$. 100. а), б), в), ж). 103. а), г), ж), з), и), к) — да; б), в), д), е) — нет.

104. $\dfrac{\overline{\varphi \vee \psi}}{\bar{\varphi}\,\bar{\psi}}$; $\dfrac{\bar{\varphi}\,\bar{\psi}}{\overline{\varphi \vee \psi}}$; $\dfrac{\overline{\varphi\,\psi}}{\bar{\varphi} \vee \bar{\psi}}$; $\dfrac{\bar{\varphi} \vee \bar{\psi}}{\overline{\varphi\,\psi}}$. 107. а) Нет: $(p \vee q)\,p \Rightarrow \bar{q}$ не является тождественно-истинной формулой, при $p = q = И$ она принимает значение Л; б) да; в) нет; г) да.

108. Обозначения: p_1 — «целое число больше 1», p — «целое число — простое», q — «целое число — составное», p_2 — «целое число, больше 2», r — «целое число — четное».

$$p_1 \Rightarrow p \vee q,\ p_2 \Rightarrow p_1,\ p_2 r \Rightarrow \bar{p} \vdash p_2 r \Rightarrow q;$$

$$p_1 \Rightarrow p \vee q,\ p_2 \Rightarrow p_1,\ p_2 r \Rightarrow \bar{p},\ p_2 r \vdash q; \text{ (ТД)}.$$

Вывод:

1. $p_2 r \Rightarrow \bar{p}$;	1. п;
2. $p_2 r$;	2. п;
3. $\bar{p}$;	3. ПЗ (1, 2);
4. $p_2 \Rightarrow p_1$;	4. п;
5. p_2;	5. УК (2);
6. p_1;	6. ПЗ (4, 5);
7. $p_1 \Rightarrow p \vee q$;	7. п;
8. $p \vee q$;	8. ПЗ (7, 6);
9. q;	9. УД(8, 3).

Глава 3. Предикаты

115. Областью истинности предиката может быть любая часть области определения. Следовательно, на n-элементном множестве можно определить столько предикатов, сколько частей имеет это множество, т. е. 2^n.

117.

x	y	z	$P(x, y, z)$
0	0	0	И
0	0	1	Л
0	1	0	И
0	1	1	Л
1	0	0	И
1	0	1	Л
1	1	0	Л
1	1	1	И

$\underset{(x,\ y,\ z)}{M}[P(x, y, z)] = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

122. 1) а) $A \cap B \neq \varnothing$; б) $A \subseteq B$; в) $B \subseteq A$; г) $A \cap B = \varnothing$. **124.** а) $(\forall x, y \in C)(\exists z \in C)\, S(x, y, z)$; б) $(\forall x, y, z, t \in C)[S(x, y, z) \wedge \wedge S(x, y, t) \Longrightarrow (z = t)]$; з) $(\forall x, y)[R(x, y) \Longleftrightarrow (\exists k \in N)\, S(x, k, y)]$; к) $(\forall x, y \in R)[R(x, y) \Longrightarrow (\exists z \in R)(R(x, z) \wedge R(z, y))]$. **125.** а) «Все натуральные числа — целые» (И); б) «Некоторые натуральные числа — целые» (И); в) «Все целые числа — натуральные» (Л); л) «Всякое простое число нечетное» (Л). **126.** б) $\overline{(\exists x)}\, P(x)$; в) $\overline{(\exists x, y)}[P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y)]$, или $(\forall x, y)[P(x) \wedge P(y) \Longrightarrow \Longrightarrow (x = y)]$; г) $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Longrightarrow (x = y))]$; е) $(\forall x, y, z)[P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \Longrightarrow (x = z) \vee (y = z)]$. **127.** а) $(\forall A, B)(\exists a)[A \ast a \wedge B \ast a]$; б) $(\forall A, B)(\forall a, b)[\overline{A = B} \wedge A \ast a \wedge B \ast a \wedge \wedge A \ast b \wedge B \ast b \Longrightarrow (a = b)]$; в) $(\forall a)(\exists A, B)[A \ast a \wedge B \ast a \wedge \wedge \overline{A = B}]$; г) $(\exists A, B, C)(\overline{\exists a})[A \ast a \wedge B \ast a \wedge C \ast a]$. **131.** Если каждое из двух произвольных целых чисел не делится на 3, то и их сумма не делится на 3. Отрицание этого предложения: $(\exists x, y)[\overline{D}(3, x) \wedge \overline{D}(3, y) \wedge D(3, x + y)]$ — «Существуют два целых числа таких, что каждое из них не делится на 3, а их сумма делится на 3». **132.** $(\forall a)(\forall A)[A \ast a \Longrightarrow (\exists b, c)(A \ast b \wedge A \ast \ast c \wedge b \parallel a \wedge c \parallel a \wedge \overline{b = c})]$; $(\exists a)(\exists A)[A \ast a \wedge (\exists b, c)(A \ast b \wedge \wedge A \ast c \wedge b \parallel a \wedge c \parallel a \wedge \overline{b = c})]$. **133.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l \equiv (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > > 0)(\exists x \neq x_0)[\,|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - l| \geqslant \varepsilon]$. **136.** $(\forall x_1, x_2)[x_1 < < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)]$; $(\exists x_1, x_2)[x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \leqslant f(x_2)]$.

Глава 4. Применение в математике

152. а) $q \Longrightarrow p_1p_2p_3$; $p_1q \Longrightarrow p_2p_3$; $p_2q \Longrightarrow p_1p_3$; $p_3q \Longrightarrow p_1p_2$; $p_1p_2q \Longrightarrow p_3$; $p_1p_3q \Longrightarrow p_2$; $p_2p_3q \Longrightarrow p_1$; б) $q \Longrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$; $q \Longrightarrow p_1$; $q \Longrightarrow p_2$; $q \Longrightarrow p_3$. 153. а) $(\forall a, b)(\forall \alpha)[a \parallel b \wedge \alpha \times a \Longrightarrow \alpha \times b]$; обратные предложения: $(\forall a, b)(\forall \alpha)[\alpha \times b \Longrightarrow a \parallel b \wedge \alpha \times a]$ — не является теоремой; $(\forall a, b)(\forall \alpha)[\alpha \times a \wedge \alpha \times b \Longrightarrow a \parallel b]$ — теорема (обратная данной); $(\forall a, b)(\forall \alpha)[a \parallel b \wedge \alpha \times b \Longrightarrow \alpha \times a]$ — теорема (другая формулировка данной теоремы). 155. а) Достаточна, но не необходима; б) необходимо и достаточно; в) необходима, но недостаточна; е) достаточно, но не необходимо; ж) необходимо и достаточно. 160. а) 4, 6, 7, 8; б) 1, 2, 3, 5, 7, 8; в) 1, 4, 6, 7, 8.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Абрам Аронович Столяр

ЛОГИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

Редактор А. А. Белянкина
Обложка Л. А. Агибалова
Худож. редактор Л. Г. Медведева
Техн. редактор Г. М. Романчук
Корректор Г. В. Вагабова

АТ 32741. Сдано в набор 29/VII 1970 г.
Подписано к печати 18/XI 1970 г.
Бумага $70\times108^1/_{32}$ типогр. № 1. Печ. л. 7 (9,8).
Уч.-изд. л. 9,88. Изд. № 69—40. Зак. 1055.
Тираж 19000 экз. Цена 38 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция физико-математической литературы. Минск, ул. Кирова, 24.

Типография Издательства ЦК КП Белоруссии, Минск, Ленинский пр., 79.

Столяр А. А.

С81 Логическое введение в математику. Мн., «Вышэйш. школа», 1971.
224 с. с илл.

Книга содержит изложение вводного курса, предназначенного для студентов первого года обучения математических специальностей педагогических вузов.

Цель этого курса — привить студентам навыки современного математического мышления и его точного, краткого и ясного выражения, облегчить им последующее изучение различных математических дисциплин и методики современного преподавания математики в школе.

В книге имеются упражнения для самостоятельной работы студентов.

Она может быть использована и на факультативных занятиях в старших классах средней школы.

$\frac{2-2}{9-71}$ 51

ОПЕЧАТКА

	Напечатано	Следует читать
Стр. 124 строка 6 сверху	$k - n$	$k = n$